Unità di misura e
Analisi Dimensionale

Definiamo le dimensioni

- Le dimensioni sono riferite ad una grandezza fisica e sono associate a simboli, come M, L, e T che rappresentano massa, lunghezza, e tempo
- Nell'ambito del Sistema internazionale di misura sono state definite le ”dimensioni fondamentali”
- Tutte le unità di misura sono riconducibili a queste unità fondamentali

Analisi dimensionale

- L' analisi dimensionale è uno strumento matematico applicato in fisica, chimica, ingegneria e biomeccanica.
- È utilizzata per formare ipotesi su situazioni fisiche complesse che possono essere verificate da esperimenti.

Esempio

- L'altezza massima che un corpo può raggiungere saltando è definita dalla massa del corpo e dalla forza di gravità
- Le dimensioni sono la massa (M) e la forza di gravità ($M*L/T^2$)

- Animaletti molto leggeri possono saltare molto in alto (la forza di gravità ha un effetto minore su di loro)

Dimensioni e formule

- Ogni formula è ricorducibile alle sue dimensioni

Esempio di dimensioni e di unità di misura in una equazione

- La dimensione della velocità
  - distanza/tempo o L/T.
- La dimensione di una forza
  - massa × distanza/tempo² o ML/T^2.
- Le unità di misura per L sono:
  - metri, piedi, pollici, miglia o micron; ma qualsiasi lunghezza ha come **dimensione L,** indipendentemente da quali **unità** di misura sono arbitrariamente scelte per misurarla.

Fattore di conversione

- Due differenti unità di misura della stessa grandezza fisica hanno fattori di conversione tra loro.
  - Per esempio: 1 in = 2.54 cm; allora (2.54 cm/1in) è il fattore di conversione ed è esso stesso senza dimensioni: L/L

- Le dimensioni di una quantità fisica sono associate alla combinazione di Massa Lunghezza Tempo rappresentate dai simboli M, L, T rispettivamente

- Ad esempio le dimensioni della velocità sono:”distanza/tempo" (L/T or LT^{-1}), e della forza "massa× accelerazione" o ”massa× (distanza/tempo)/tempo" (ML/T^2 or MLT^{-2}).

- Unità di quantità fisiche e le loro dimensioni sono collegate ma non sono lo stesso concetto: la lunghezza può avere come unità i metri i piedi, le miglia i kilometri ma ogni lunghezza ha dimensione L

- Due diverse unità della stessa quantità fisica hanno un fattore di conversione tra loro: 1 in = 2.54 cm; quindi (2.54 cm/in) è detto fattore di conversione, ed è senza dimensioni!!!!

- Non esistono fattori di conversione fra dimensioni

Le Formule

- Da queste unità di base se ne possono derivare altre. Sono rappresentate da un insieme di unità di base accoppiate fra loro attraverso moltiplicazioni e/o divisioni.
- Queste relazioni sono separate da punti $kg.m.s^{-2}$ e possono essere scritte in modi diversi.
- Per esempio, l'accelerazione di gravità è approssimativamente 9.81 metri al secondo al secondo e può essere scritta in questi modi:
- $9.81m/s^2$ $9.81m.s^{-2}$

Formule a-dimensionali

- L'analisi dimensionale di ogni equazione deve essere da un punto di vista delle dimensioni consistente:
- I termini nelle due parti dell'equazione devono avere le stesse dimensioni
- Ad esempio: la distanza x percorsa nel tempo t da un oggetto che parte da fermo e si muove a costante accelerazione è:
- $x = at^2 / 2.$
- Verifichiamo la consistenza dimensionale:
- Accelerazione è misurata in unità di m/s^2. Quindi ha dimensioni $[a] = L / T^2$, e quindi i termini dell'equazione sono:
- $L = (L / T^2) * T^2 = L$

Unità per esprimere le quantità misurate

‘Systeme International d’Unites’ (sistema SI) rappresenta un sistema razionale e coerente per misurare e dichiarare quantità fisiche.

Tabella 1. Alcune quantità fisiche di base

Quantità fisiche di base	**Simbolo**	**Nome**	**SI Unità**
Lunghezza	L	metri	m
Massa	M	chilogrammi	kg
Tempo	T	secondi	s
Angolo	α, β, φ	radianti	rad

Sistema Internazionale

Tabella 2. I prefissi usati più' comunemente sono:

Prefisso	**Moltiplicatore**	**Simbolo**	**Esempio**
mega	10^{6}	M	megawatt (MW)
kilo	10^{3}	k	kilojoule (kJ)
centi	10^{-2}	c	centimetri (cm)
milli	10^{-3}	m	Milligrammi (mg)
micro	10^{-6}	μ	Microsecondi (μs)

Table 3. Unità usate comunemente in scienze motorie.

Quantità Fisiche	***Simbolo***	**Unità**	**Dimensioni**
Velocità	v	$m.s^{-1}$	Distanza/tempo
Accelerazione	a	$m.s^{-2}$	Velocità/tempo
Accelerazione di gravità	g	$m.s^{-2}$	Velocità/tempo
Velocita' angolare	α	$rad.s^{-1}$	Angolo/tempo
Accelerazione angolare	$\dot{\alpha}$	$rad.s^{-2}$	Velocità angolare/tempo
Periodo	T	s (Tempo per 1 ciclo)	tempo
Frequenza	f	Hz (Hertz)	Ripetizioni/tempo
Densita'	ρ	$kg.m^{-3}$	Massa/volume
Forza	F	$kg.m.s^{-2}$ o N (Newton)	Massa * accelerazione (a)
Peso	W	N (massa x gravità)	Mass * accelerazione (g)
Momento di una forza	M	N.m	Forza * distanza
Lavoro	W	J (Joule = 1 N.m)	Forza * distanza
Energia	*diverse*	J	
Potenza	P	W (Watt = 1 $J.s^{-1}$))	(Forza * distanza)/tempo

*Unità che si riferiscono a nomi di scienziati sono scritti in lettere capitali (N= Isaac Newton, W= James Watt) tutti gli altri in lettere minuscole.

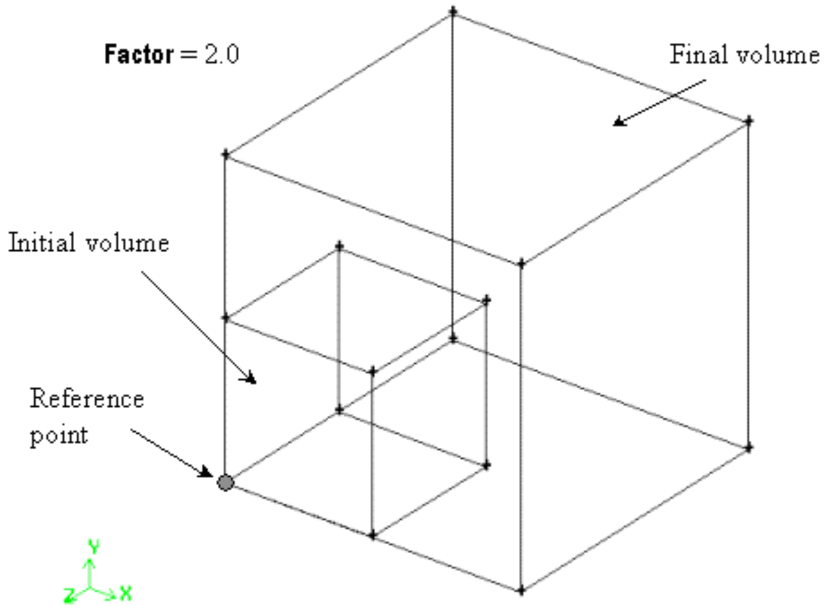
Il concetto di scala

Il concetto di scala è applicabile ogni qualvolta un sistema è rappresentato proporzionalmente da un altro sistema

Ad esempio la scala di una mappa è aumentata o ridotta da un modello ed indica il rapporto tra le distanze della mappa (o del modello) e la distanza reale.

– Una mappa in scala 1:50,000 mostra una distanza di 50,000 cm (=500 m) come 1 cm sulla mappa

Oggetti geometricamente simili



Fattore scalare

E' un numero che scala o moltiplica una quantità:
y=Cx

C è il fattore scalare per x ed è chiamato costante di proporzionalità.

$$L_1 = L_0 \cdot c$$ Lunghezza

$$A_1 = A_0 \cdot c^2$$ Superficie

$$V_1 = V_0 \cdot c^3$$ Volume

$$\alpha^{(\circ)}(l = r) = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57{,}29578^\circ \approx 57^\circ\ 17'\ 44{,}8'' = 1\ \mathrm{rad}$$

Il mondo animale

- Che cosa hanno a che vedere I rapporti scalari con il mondo animale?
- Definiscono attraverso le proporzioni e la forma le funzioni e i movimenti che i corpi possono eseguire.

Dimensioni e forma

- C’è una correlazione fra la dimensione e la forma
- La forma delle gambe di un bufalo che pesa 500 kg è diversa dalla forma delle gambe di una zanzara che pesa qualche grammo

- I vincoli fisici hanno un forte impatto sulla dimensione e la forma

Vincoli fisici

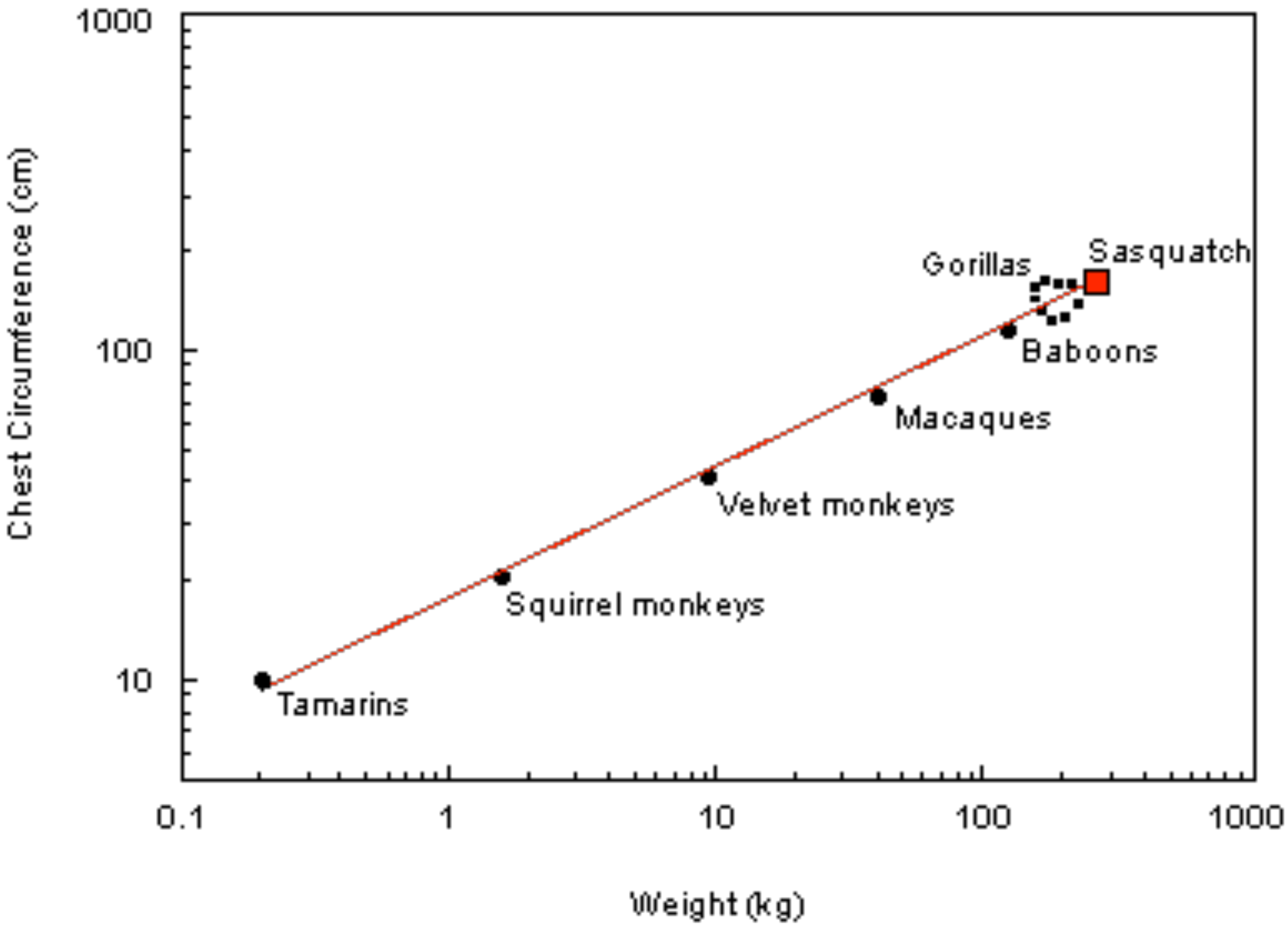
- La forma impone alla dimensione delle restrizioni:
  - Se un uccello deve volare il peso è collegato direttamente alla sua forma: uccelli molto grandi come gli struzzi hanno perso la possibilità di volare.
  - Gli animali più grandi sul pianeta sono acquatici: sono sorretti dall’acqua e meno vincolati alla forza di gravità

Fattori scalari

- In natura le dimensioni scalano le grandezze fra gli animali

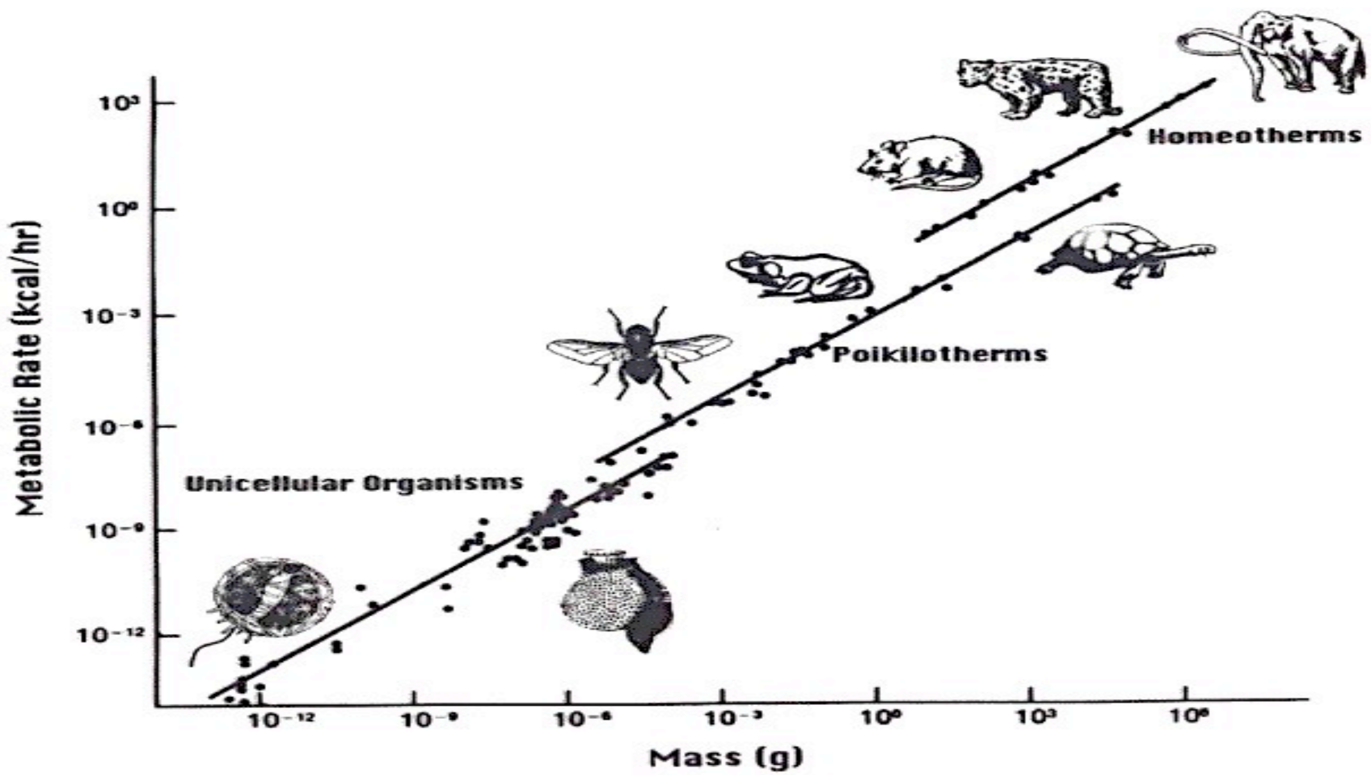
- Animali piccoli e animali grandi presentano alcune proporzionalità stabili

Primati fattore scalare



Metabolismo Massa Fattore Scalare

HEMMINGSEN ~ 1950's

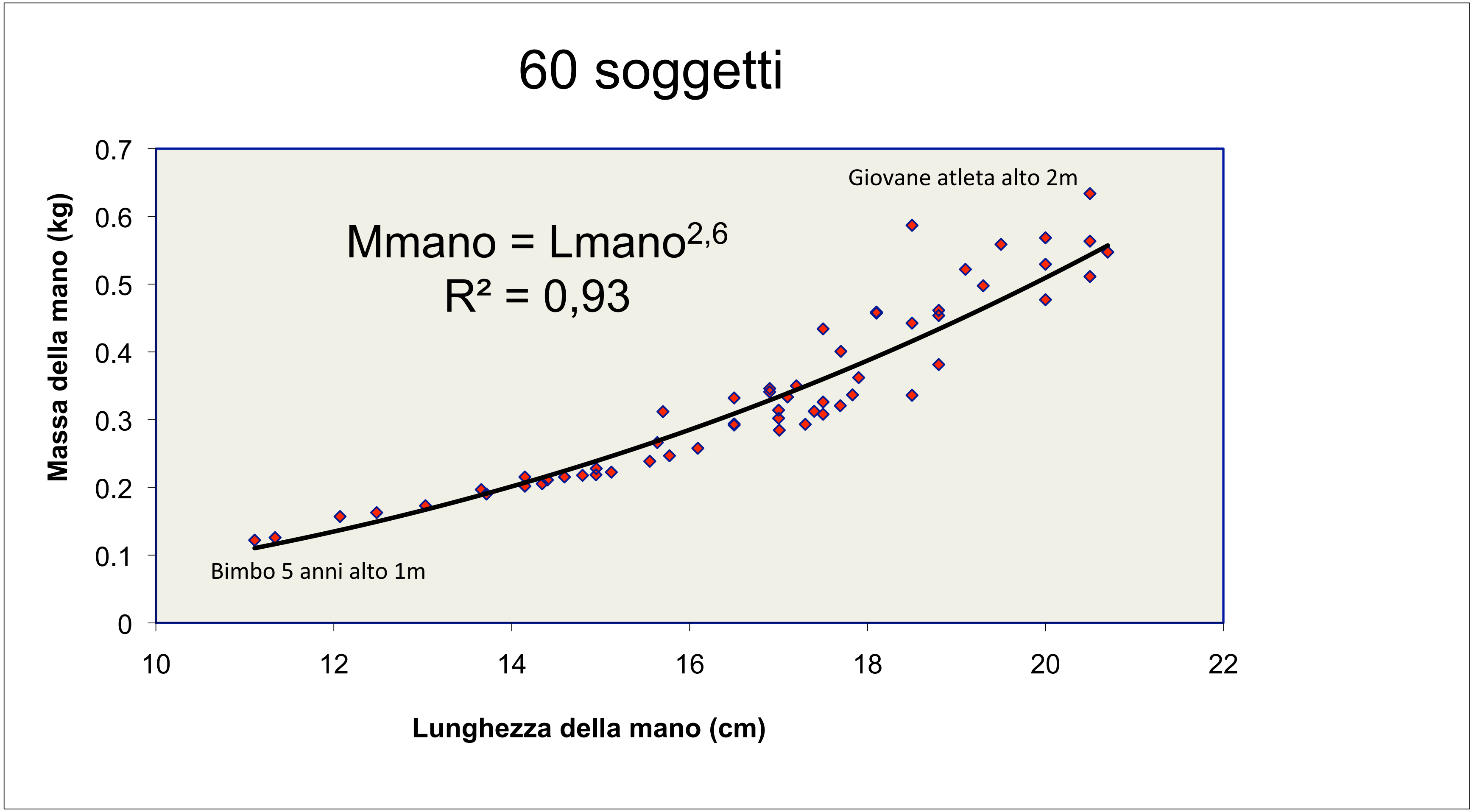


Allometric scaling of metabolic rate for a selection of homeotherms (birds and mammals), poikilotherms (fish, reptiles, amphibians, and invertebrates), and unicellular organisms. The solid lines all have a slope of .75. Modified from Hemmingsen, 1960.

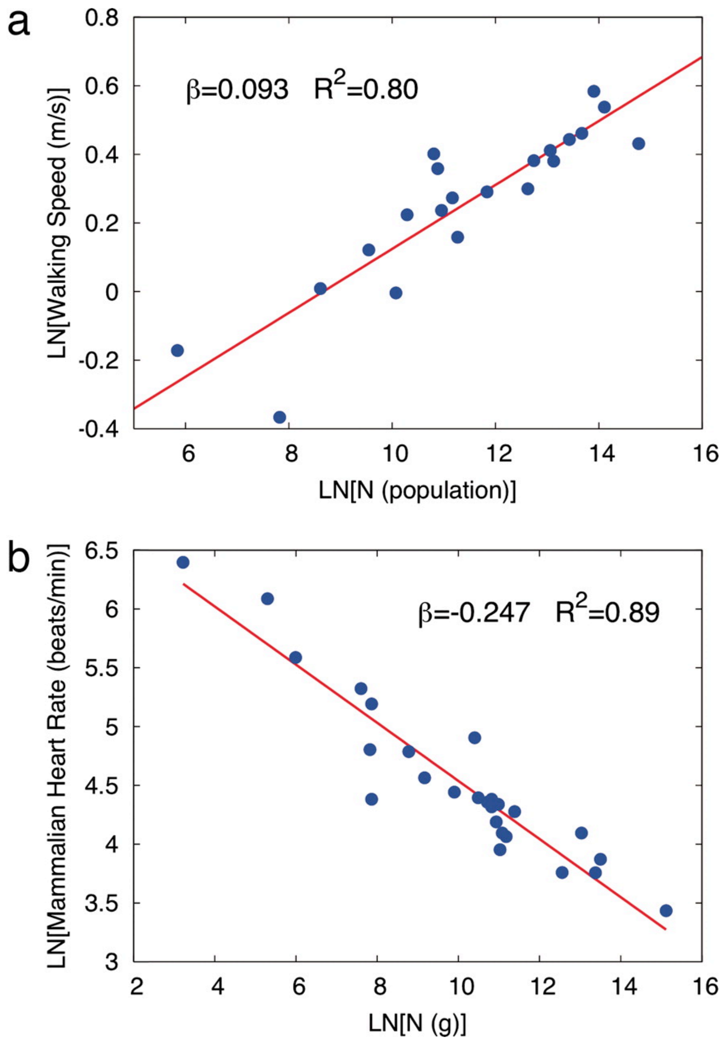
Il corpo umano

- Che cosa hanno a che vedere le dimensioni con il corpo umano?
- Definiscono le loro dimensioni e le capacità che possono esprimere

Mani geometricamente simili?
$M = L^3$



La cadenza del passo aumenta all'aumentare della grandezza della città in contrasto con la vita biologica dove la velocità (esempio battito cardiaco) diminuisce all'aumentare della grandezza dell'organismo

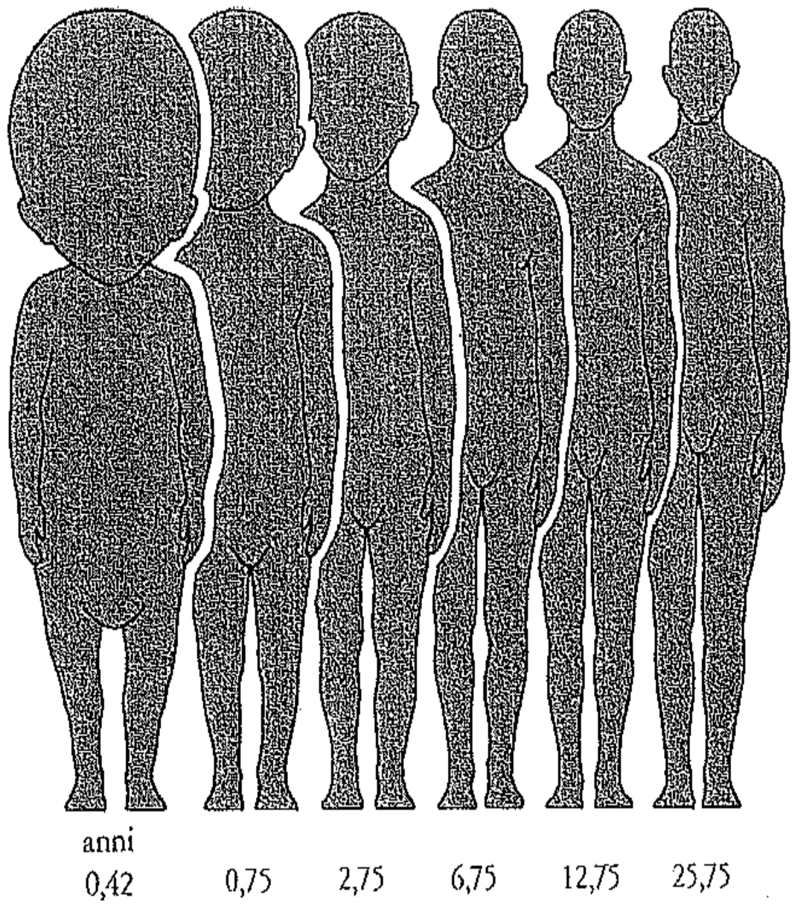


Bettencourt L M A et al. PNAS 2007;104:7301-7306

PNAS

Relazione allometrica

Lo sviluppo umano indica un cambiamento della forma corporea con il passare degli anni.

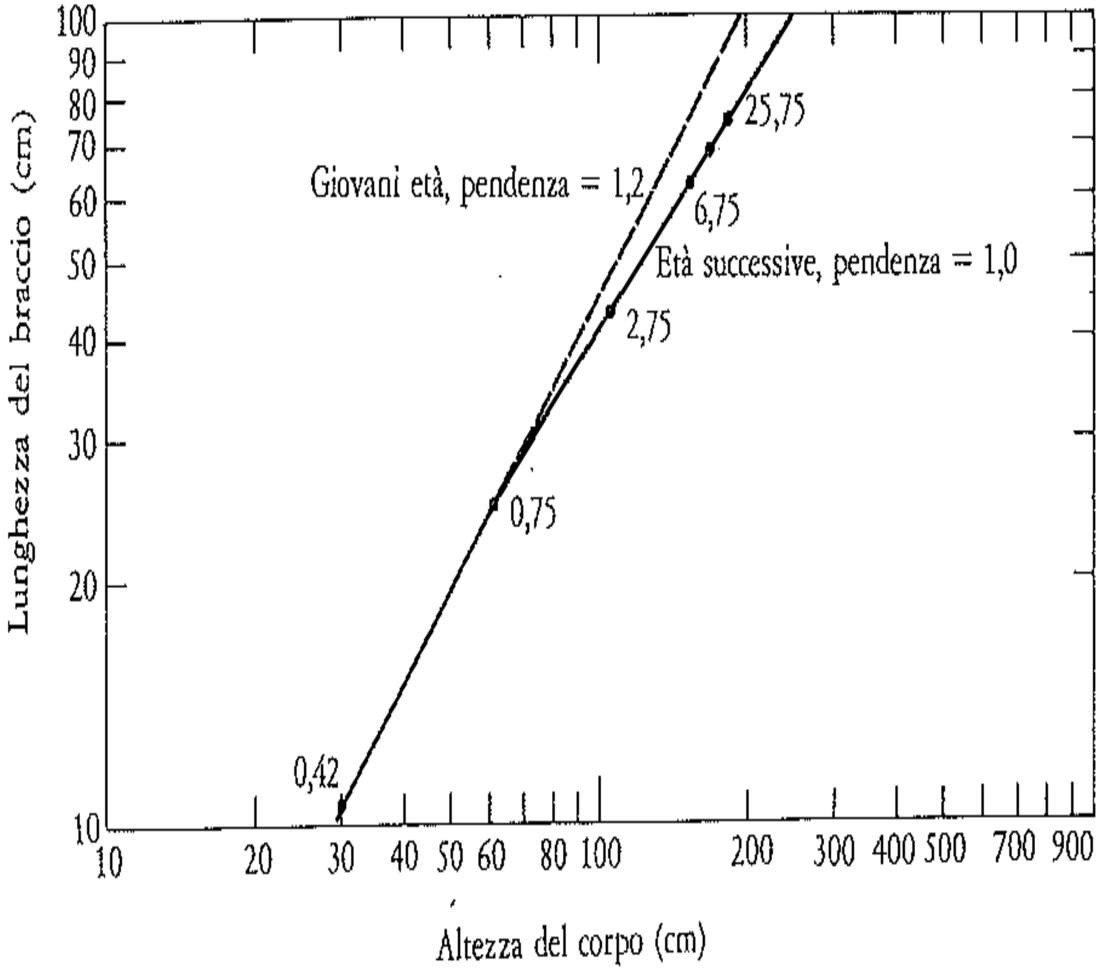


Relazioni allometriche

- Equazioni allometriche: "misure diverse"
- Supponiamo che le dimensioni di due parti di un organismo, *x* e *y*, siano legate da una certa relazione: $\neq$
- $Y=bx^a$ dove *a* e *b* sono costanti

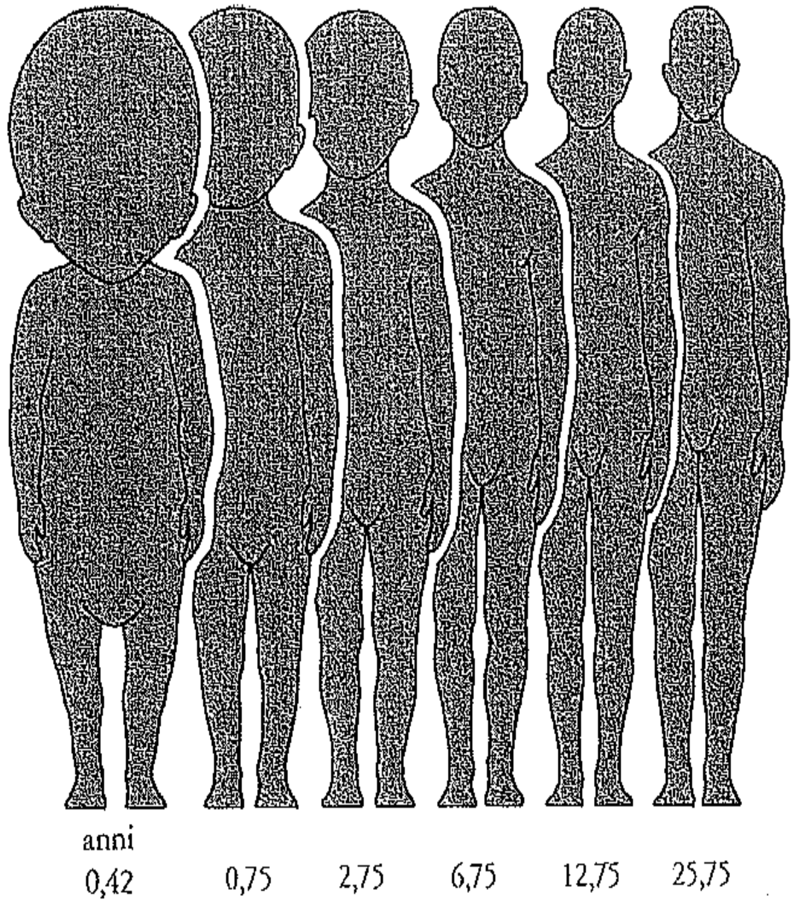
Relazione allometrica

Lunghezza del braccio rispetto all'altezza del corpo, su un grafico allometrico. I punti, ripresi dall'illustrazione qui sopra, rappresentano le sei fasi dello sviluppo umano. Ai primi stadi corrisponde una retta con pendenza 1,2, più tardi la pendenza diventa 1,0. I numeri accanto ai punti si riferiscono all'età in anni.



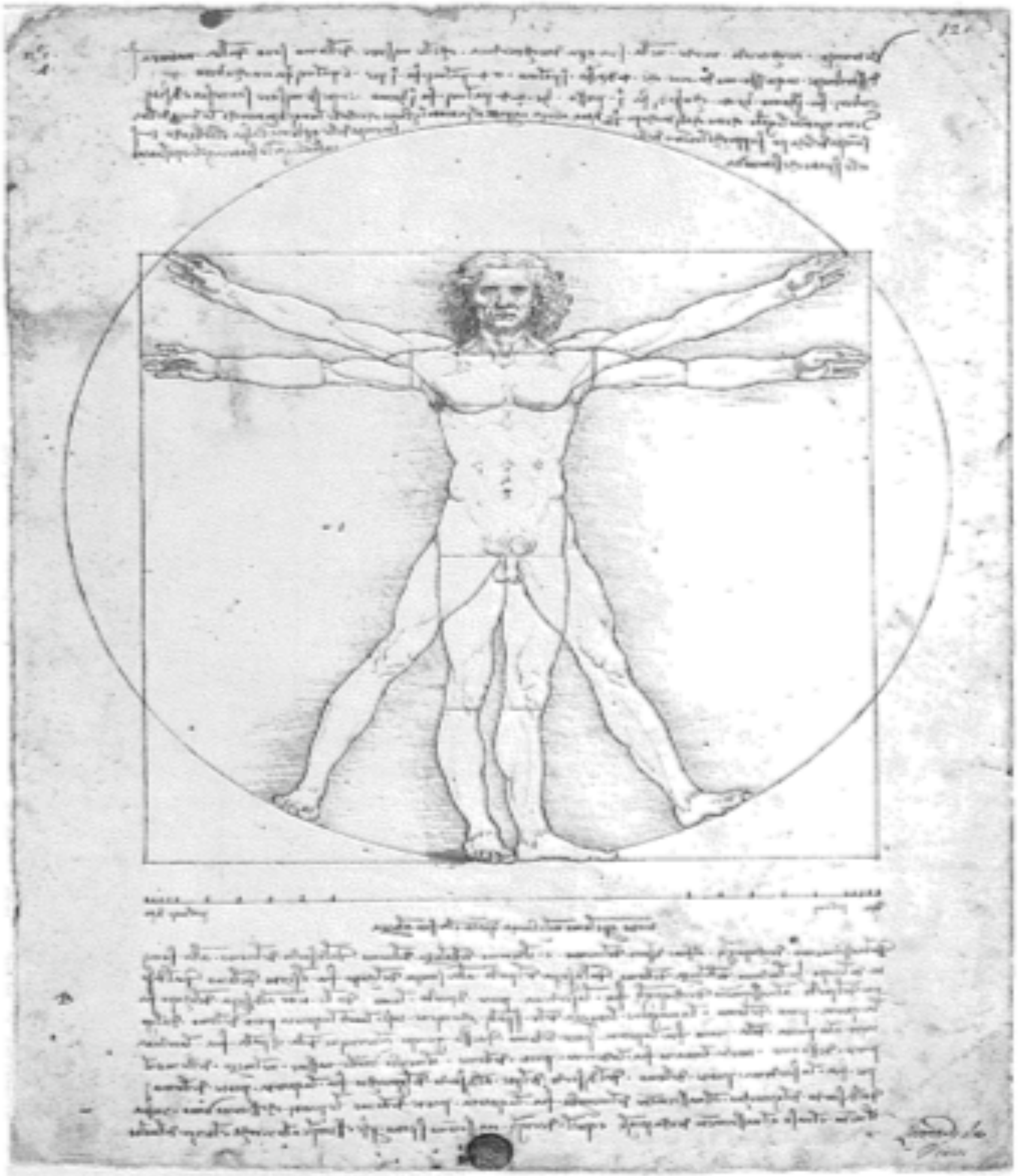
Relazione allometrica

Lo sviluppo umano indica un cambiamento della forma corporea con il passare degli anni.



Proporzioni e dimensioni

- Equazioni isometriche: con misure uguali
- quando l'esponente=1
- Supponi che:
- y=apertura delle braccia
- X= altezza degli umani adulti
- a=1
- In questo caso l'apertura delle braccia è direttamente proporzionale all'altezza del soggetto



Uomo di Vitruvio, dai quaderni di Leonardo da Vinci.

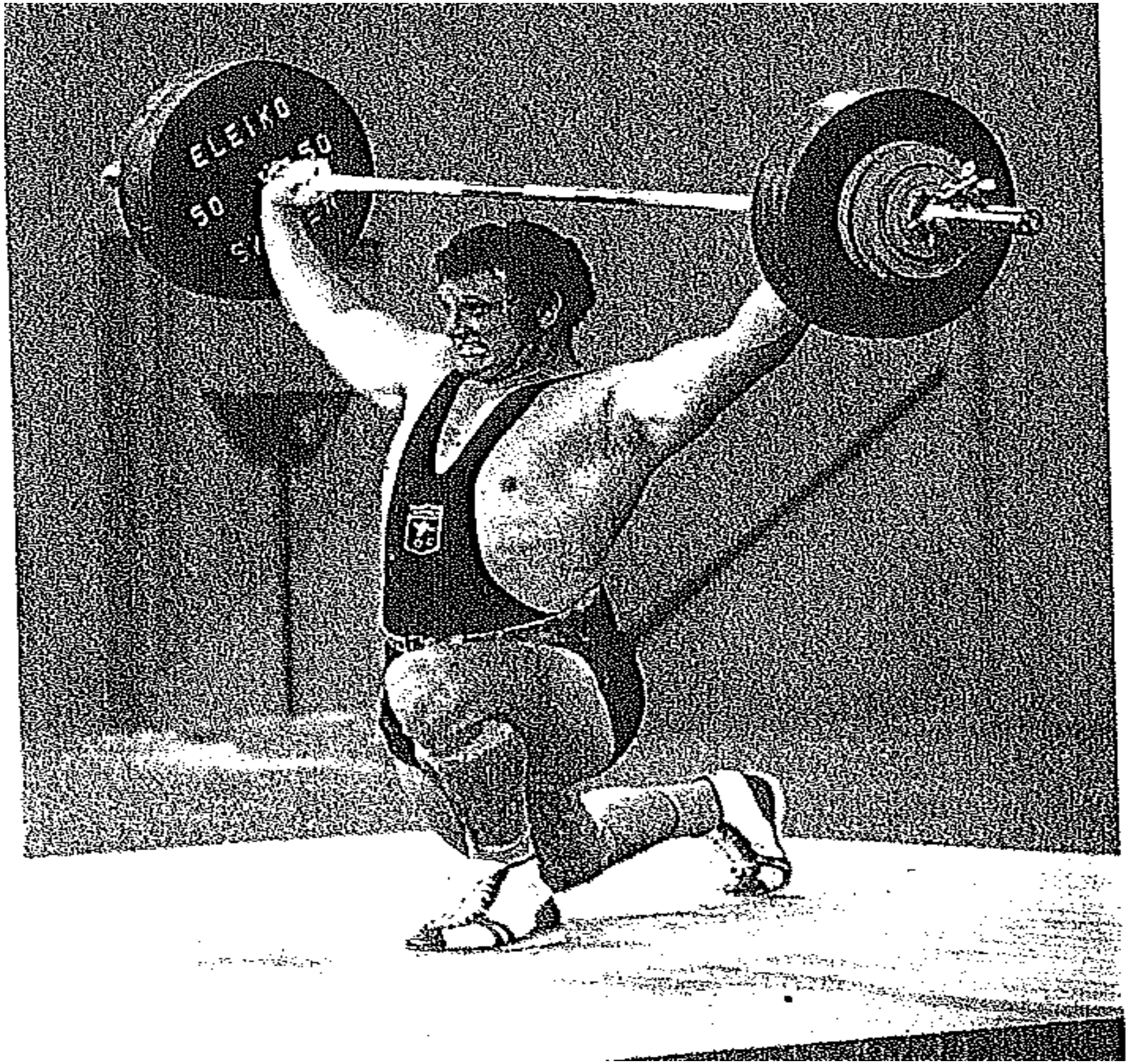
L’analisi dimensionale e il concetto di scala

- Considerare una formula a-dimensionale scalata significa utilizzare uno strumento matematico che misura ad esempio una funzione ma indipendentemente dalle dimensioni dei soggetti sotto esame, questo significa che:
  - Può essere applicato sia a persone grandi che a persone piccole poiché la loro grandezza è già presente nell’equazione come fattore scalato

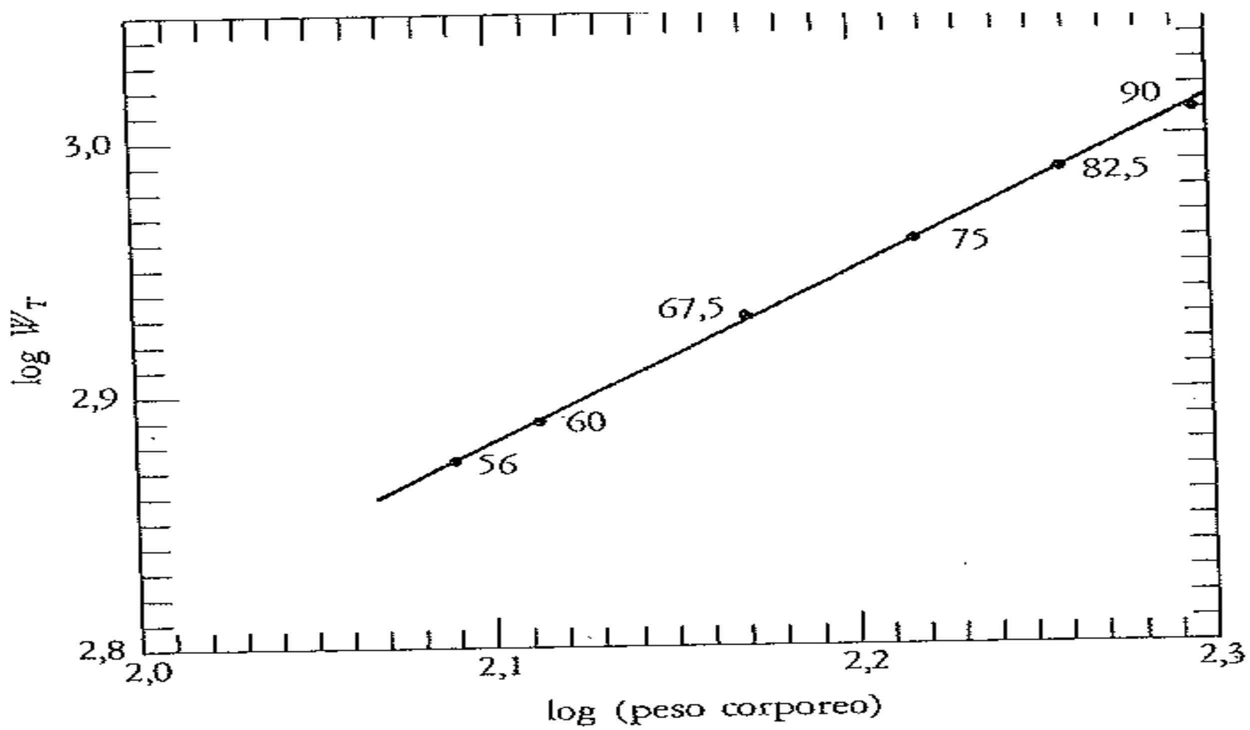
Alti e bassi

Robert Wadlow aveva vent'anni e misurava 2,7 m quando è stata scattata la fotografia, nel 1939. Suo padre era alto 1,79 m. Un funzionamento abnorme della ghiandola pituitaria può provocare il gigantismo nell'uomo. La crescita eccessiva si nota soprattutto nella testa e nelle gambe.

Analisi dimensionale nello sport



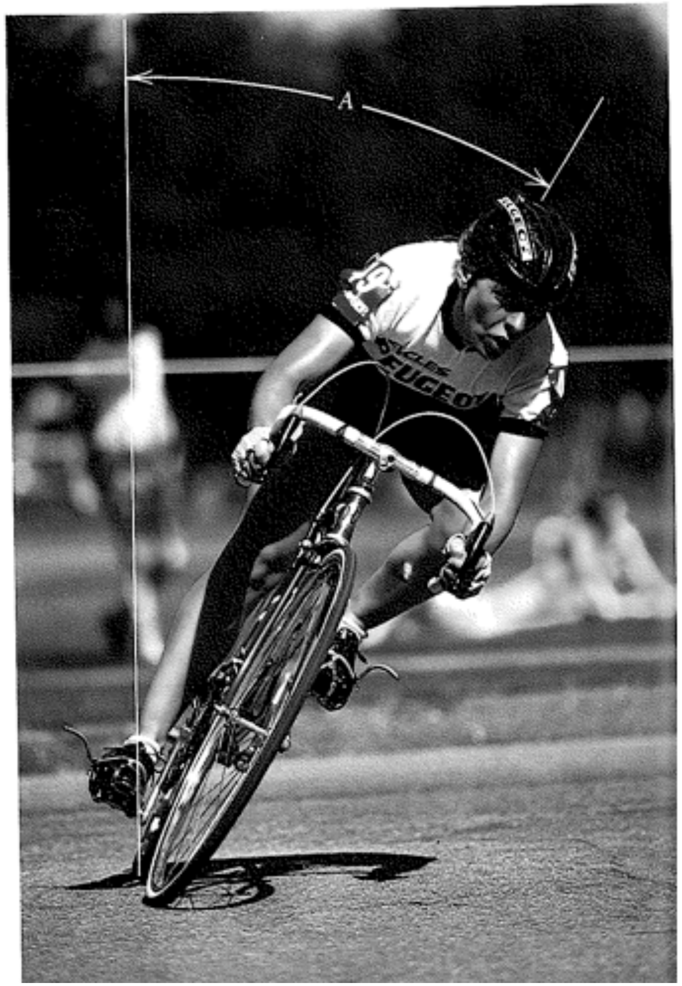
Sollevamento pesi



I record mondiali di sollevamento pesi, rappresentati da log W_T, in funzione del logaritmo del peso corporeo. Qui W_T è il peso globale sollevato in tre prove: distensione, slancio e strappo. I numeri accanto a ogni punto indicano la categoria (espressa in kg).

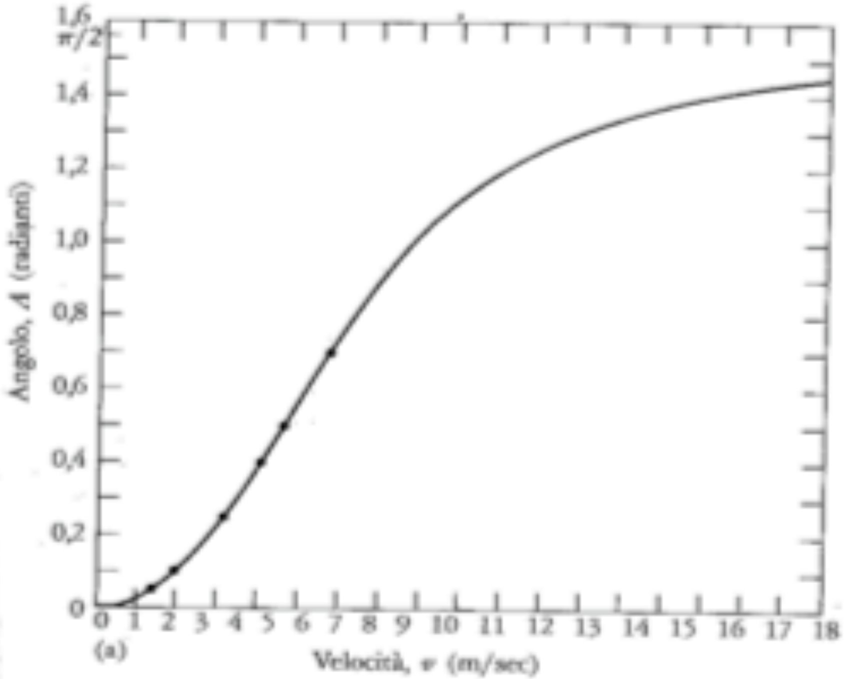
Ma a che cosa ci può servire oltre che a capire relazioni fra funzioni e grandezze?

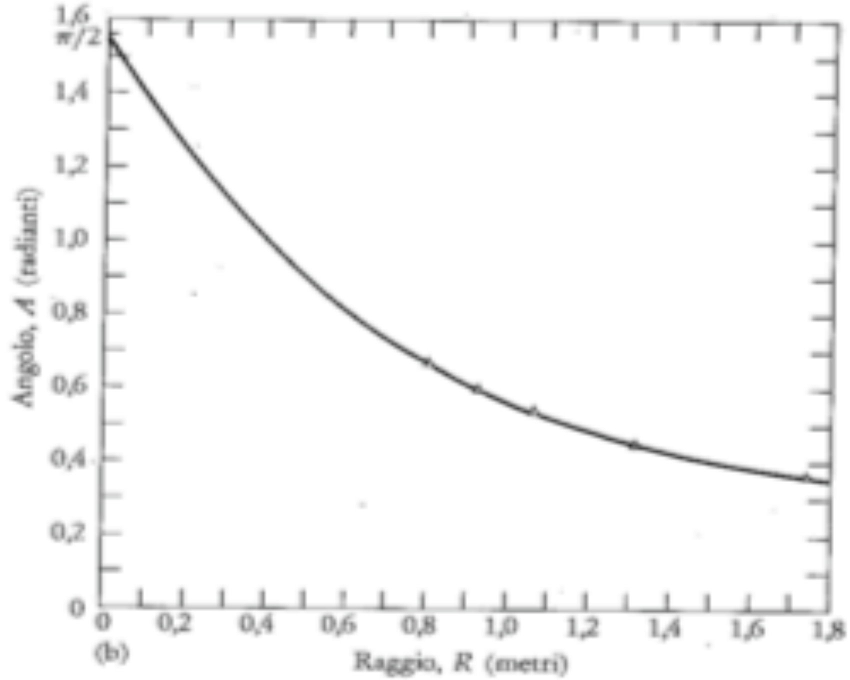
Una bicicletta che corre a velocità v su un cerchio di raggio R s'inclina di un angolo A rispetto alla verticale.



Pedalare in cerchio

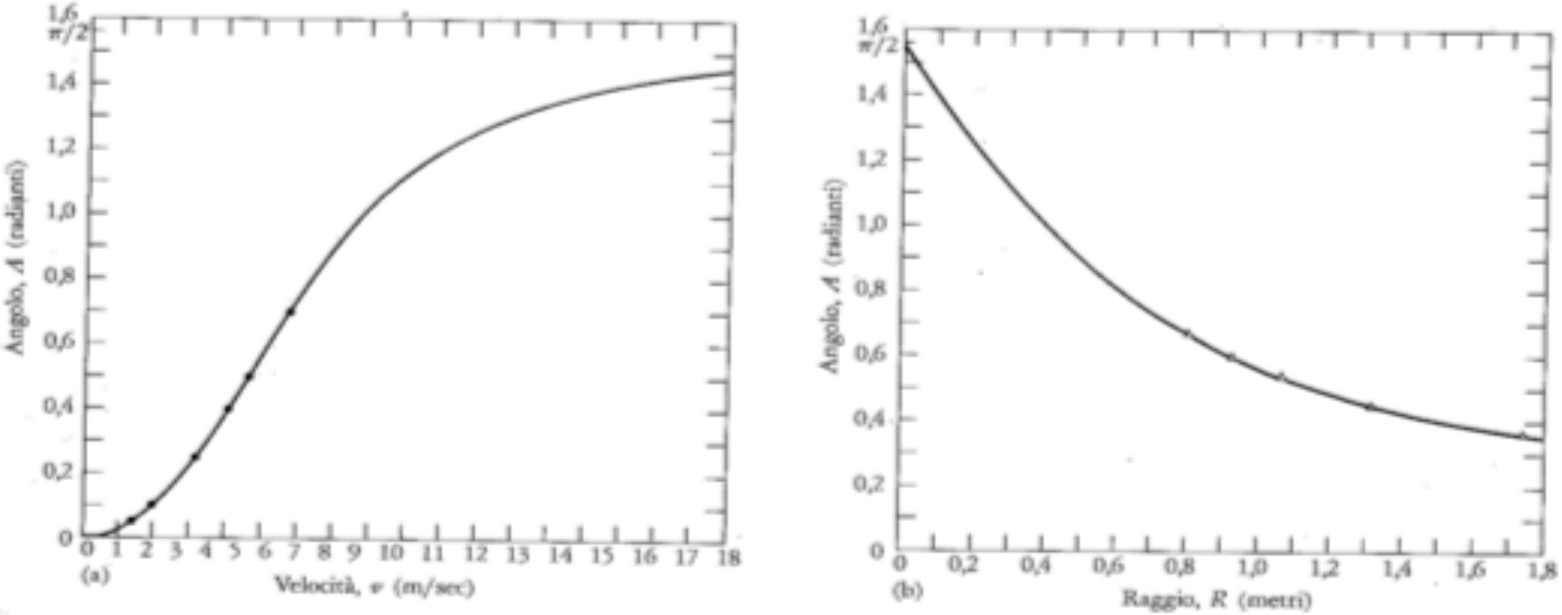
- Mentre giriamo su di un cerchio di raggio R ad una velocità costante v la bicicletta si inclina di un angolo A
- Possiamo:
- A- mantenere R costante e variare v
- B- mantenere costante v e cambiare R
  - Dopo diverse misurazioni abbiamo due curve:
  - In una l'angolo A aumenta con v, nell'altra A diminuisce all'aumentare di R


1,6
π/2
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Angolo, A (radianti)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
(a)
Velocità, v (m/sec)

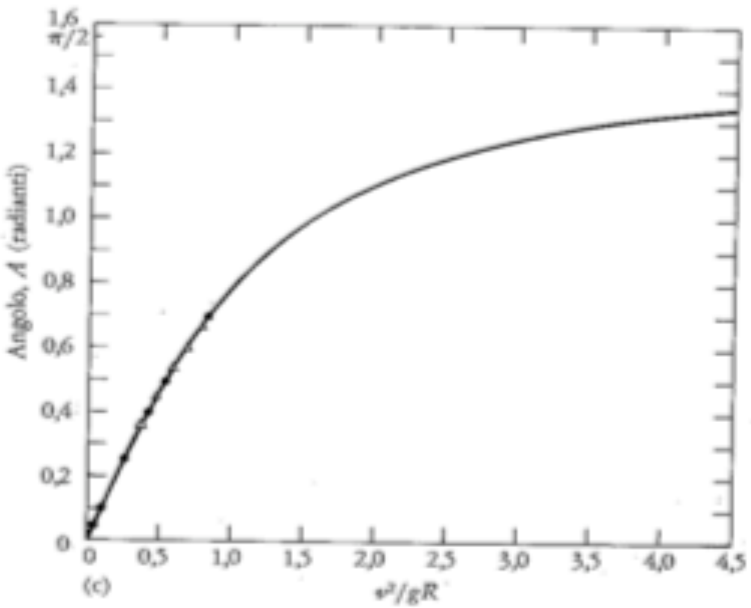

1,6
π/2
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Angolo, A (radianti)
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 1,4 1,6 1,8
(b)
Raggio, R (metri)

Come fare per calcolare A in funzione di v e di R?

- Si dovrebbero fare un infinito numero di misure per ottenere un certo numero di curve e poi interpolarle fra loro!!!
- Troppo dispendioso!
- L’analisi dimensionale può risolvere il problema.



Schemi dei risultati ottenuti con gli esperimenti sulle biciclette: (*a*) angolo *A* riportato in funzione di *v* per *R* costante; (*b*) angolo *A* riportato rispetto a *R* per *v* costante; (*c*) angolo *A* riportato rispetto al gruppo adimensionale v^2/gR, in cui tutti i dati si dispongono su un'unica curva.



$$\frac{v^2}{gR}$$

Relazione a-dimensionale

- Numero puro: V2/gR
- $V^2 = (L/T)^2$
- $g = L/T^2$
- $R = L$

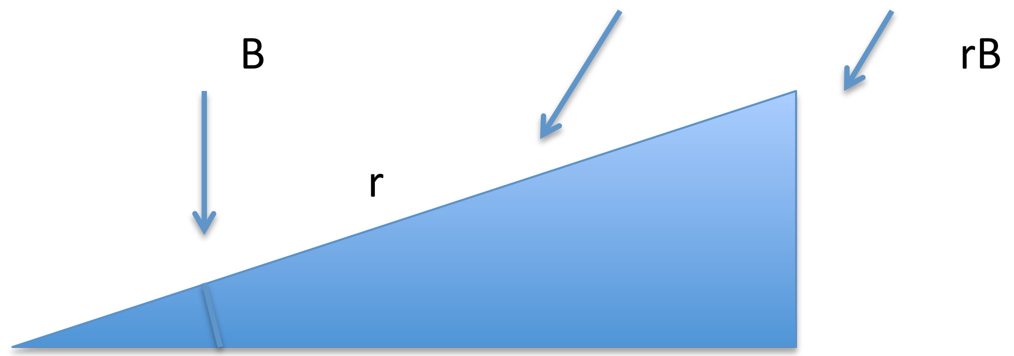
$$\frac{v^2}{gR}$$

Tutte le dimensioni si elidono!

Quale la sua utilità?

- Ora possiamo stabilire a caso i valori di v e R utilizzare la formula e dedurre A dal grafico
- Non siamo più costretti a fare un gran numero di esperimenti
- Inoltre abbiamo inserito g che ci permetterebbe di calcolare la relazione anche sulla luna!

Gli angoli sono a-dimensionali



B=rB/r   L/L

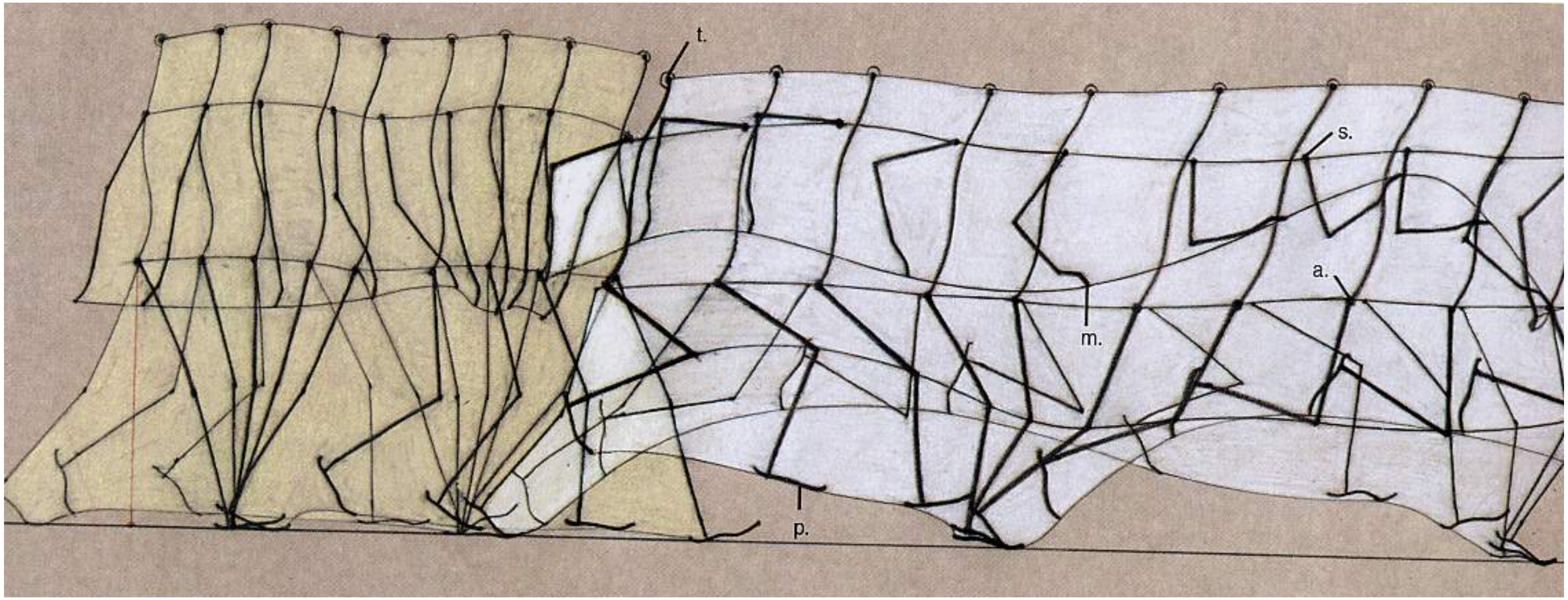
Problema: Perché ad una certa velocità anziché camminare corriamo?

- Variabili importanti:
- Velocità (v)
- g (gravità)
- L lunghezza arto inferiore

Correre è + dispendioso!

- Perché dobbiamo correre anziché camminare più velocemente?
- I vincoli meccanici non ce lo permettono!
  - Se camminando velocemente arriviamo ad una certa velocità, siamo costretti a correre

Passaggio fra camminata e corsa
la testa si alza e si abbassa



Analisi dimensionale

- Importanti variabili: $$\frac{v^2}{gl}$$ ← Lunghezza arto inferiore fattore che scala

- Velocità, accelerazione di gravità, altezza della persona

$$v^2 = \frac{L^2}{T^2}$$

$$g = \frac{v}{T} = \frac{L}{T^2}$$

$$\frac{L^2}{T^2}\frac{1}{L}\frac{T^2}{L} = \frac{L^2T^2}{L^2T^2}$$

Esempio

- Gravità 9,8 m/s^2 $\qquad \dfrac{L}{T^2}$
- Adulto arto inferiore 0.8 m (L)
- cambia camminata a corsa a 2,8 m/s
- Bambino arto inferiore 0.5m (L)
- cambia camminata a corsa a 2,2 m/s

Il cambio fra camminata e corsa

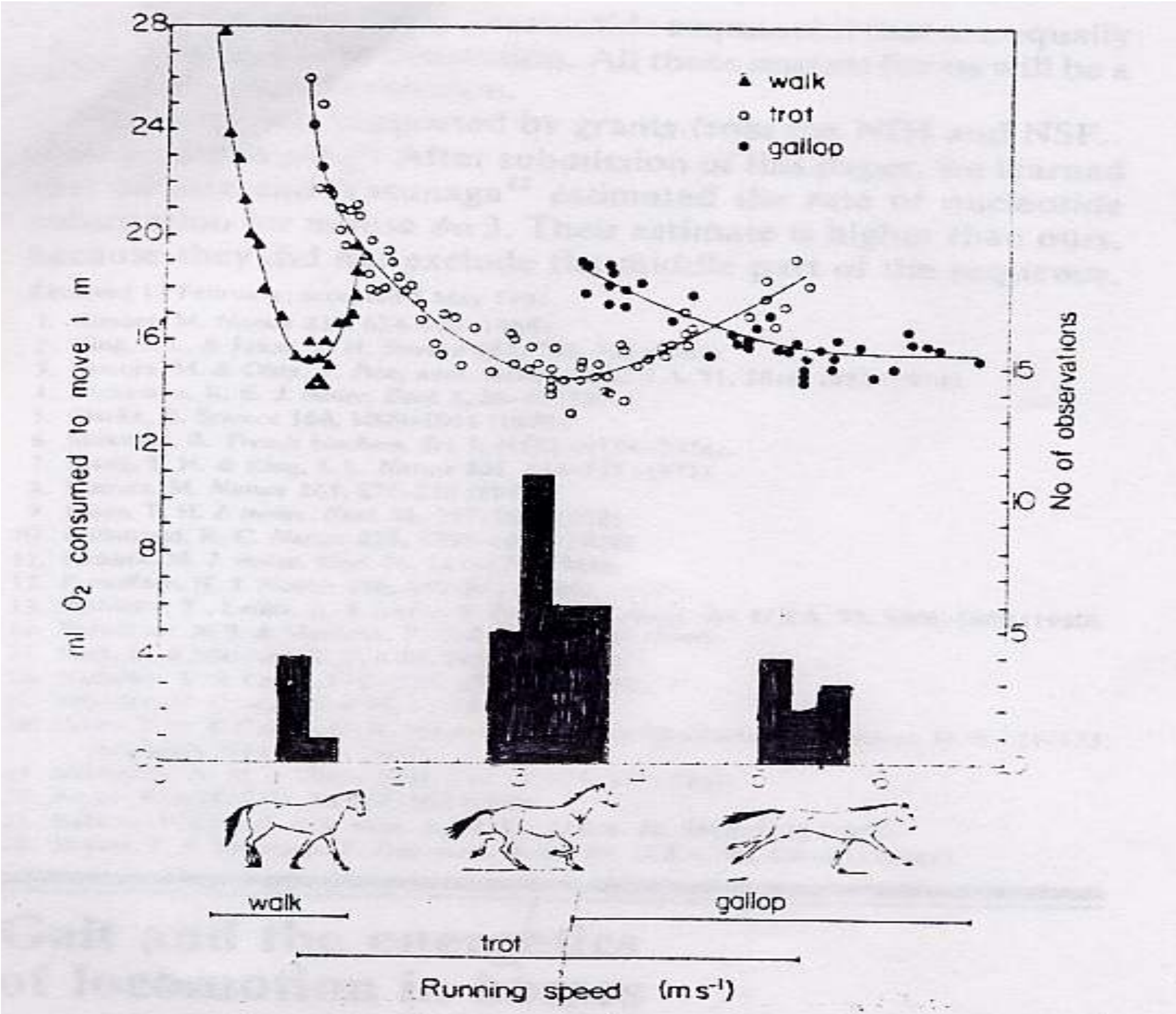
- Ad una certa velocità che è scalata sui parametri corporei passiamo dalla camminata alla corsa.
  - I bambini cambiano pattern a velocità inferiori
  - Così le persone piccole
  - Che cosa fanno i marciatori?

Camminata e vincoli energetici

- Il cambio fra un pattern di movimento ed un altro è definito da vincoli anche energetici
- L'energia minima consumata è relativa alla velocità ed al pattern scelto

- Hoyt & Taylor (Nature, 1981)

Vincoli energetici



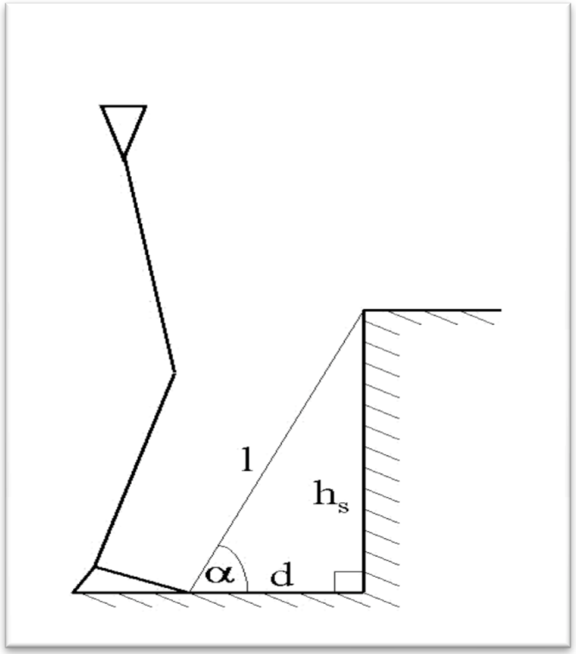
Implicazioni teoriche

- Dall'analisi dimensionale emerge che:
  - Parametri corporei e velocità scalano il movimento
  - Il movimento può essere definito da vincoli meccanici ed energetici
  - E i vincoli percettivi ed ambientali?

Salire e scendere le scale

La percezione delle capacità motorie

- Warren (1987): Lscalino/Lgamba
- Kontzac et al. (1992): anziani non seguono lo stesso rapporto scalare

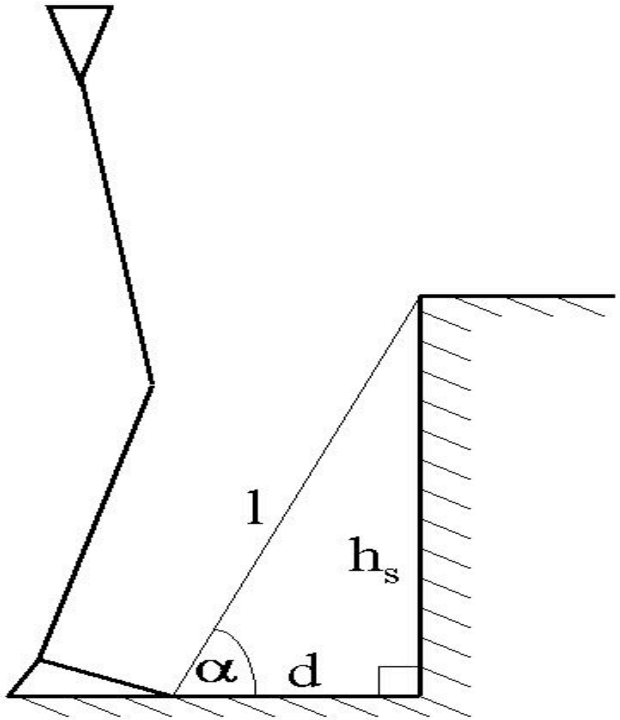


- Esiste una relazione stabile nello scegliere e nel salire il gradino più alto che tenga conto dei parametri corporei e delle capacità motorie?

Variabili da considerare

- Altezza gamba
- Altezza scalino- h_s
- Distanza dallo scalino- d
- Ipotenusa- l
- Angolo- α

$\mathrm{sen}\alpha = h_s / l$ =Angolo α



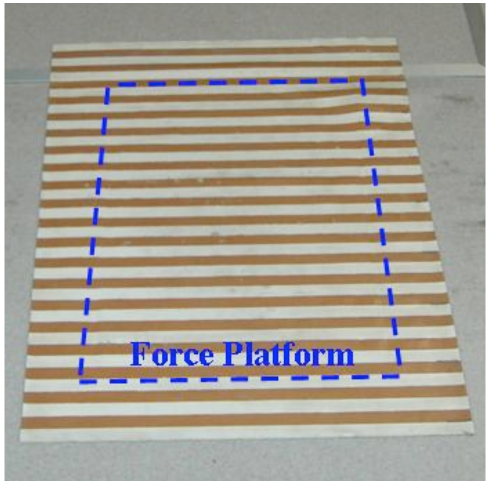
Le scale usate e la pedana

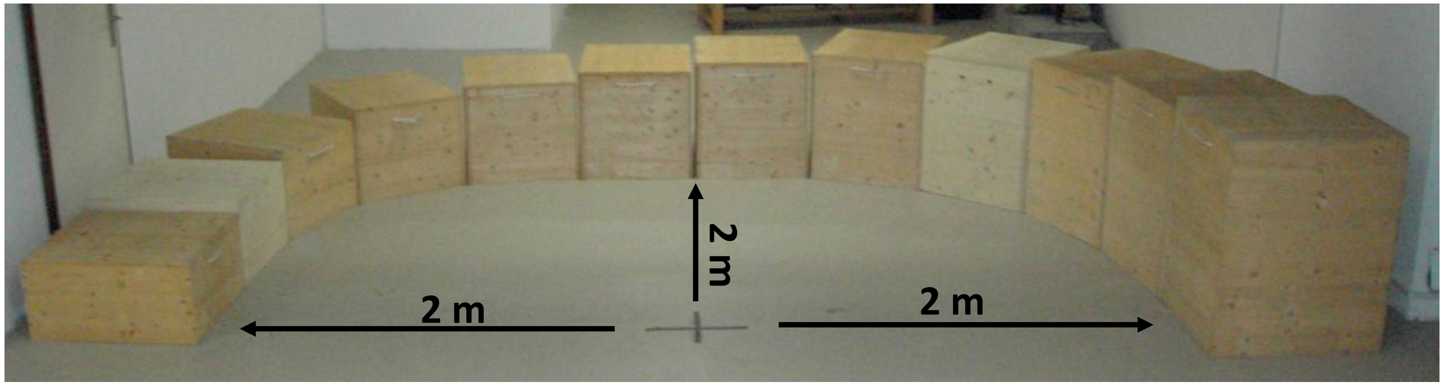
- 14 scalini in legno non pitturato (colore naturale)

  -Larghezza 50 cm, profondità 60 cm;

  -- Altezza da un 35 a 90 cm, incremento di 5 cm;

  - Disposti a semicerchio in ordine crescente (raggio 2 m)

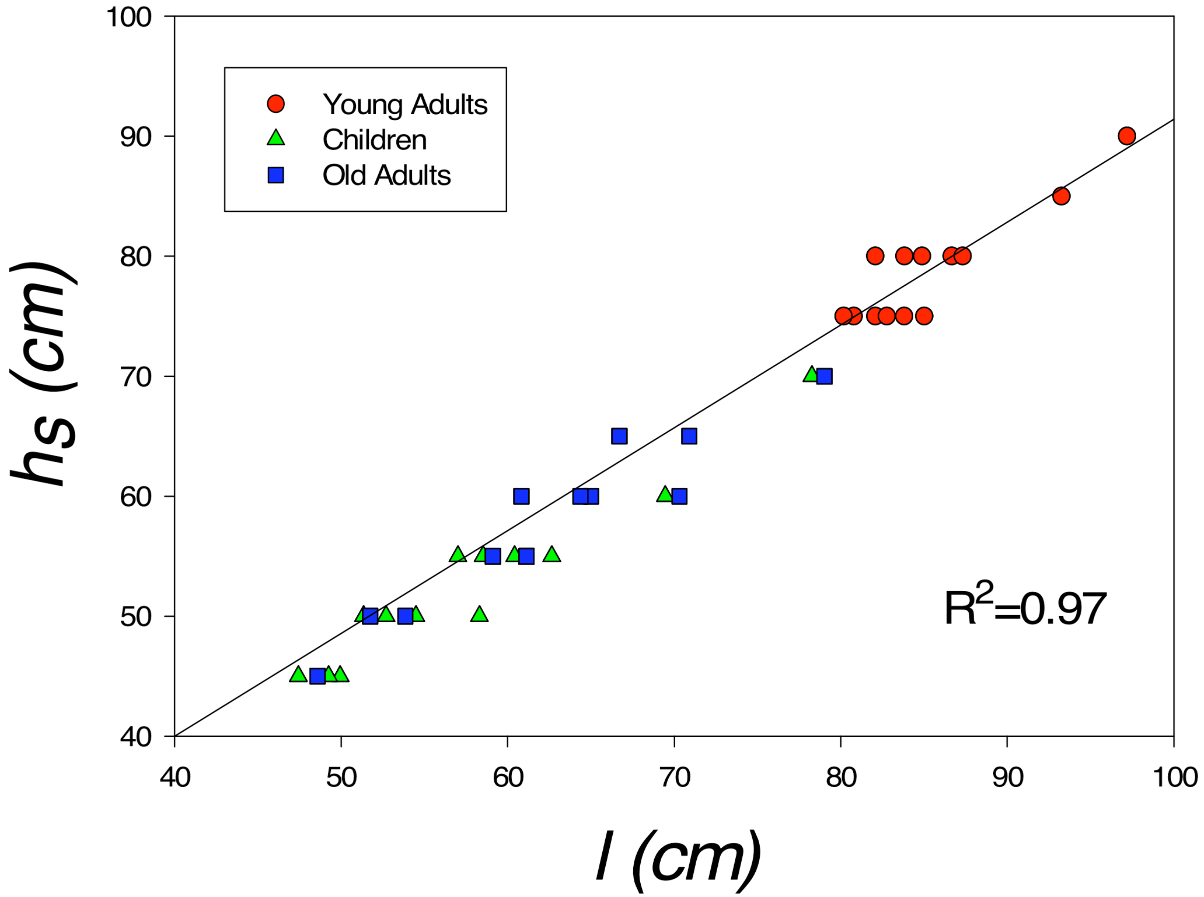




Leg Length, Height Achieved and Perceived Scaled and not Scaled

Grou	Leg Length (cm)	Achieved (cm)	Perceived (cm)	Achieved/L	Perceived/L
Young					
M	**78.5**	**79.2**	**72.7**	**1**	**0.93**
SD	*2.4*	*4.4*	*4.8*	*0.05*	*0.06*
Older					
M	**77.7**	**57.7**	**52.3**	**0.74**	**0.67**
SD	*5.9*	*6.9*	*6.3*	*0.07*	*0.06*
Children					
M	**57.7**	**52.6**	**50.7**	**0.89**	**0.88**
SD	*7.7*	*6.9*	*8.8*	*0.07*	*0.15*

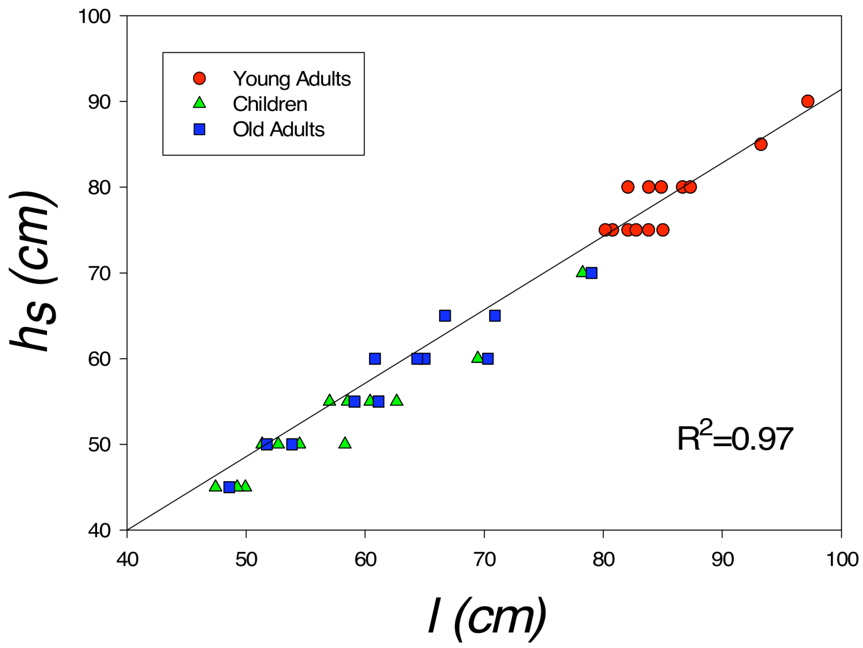
Fattore scalare Ipotenusa Altezza



Come calcolare l’angolo α

L’inclinazione
Della retta:
h_s/I unità cm/cm

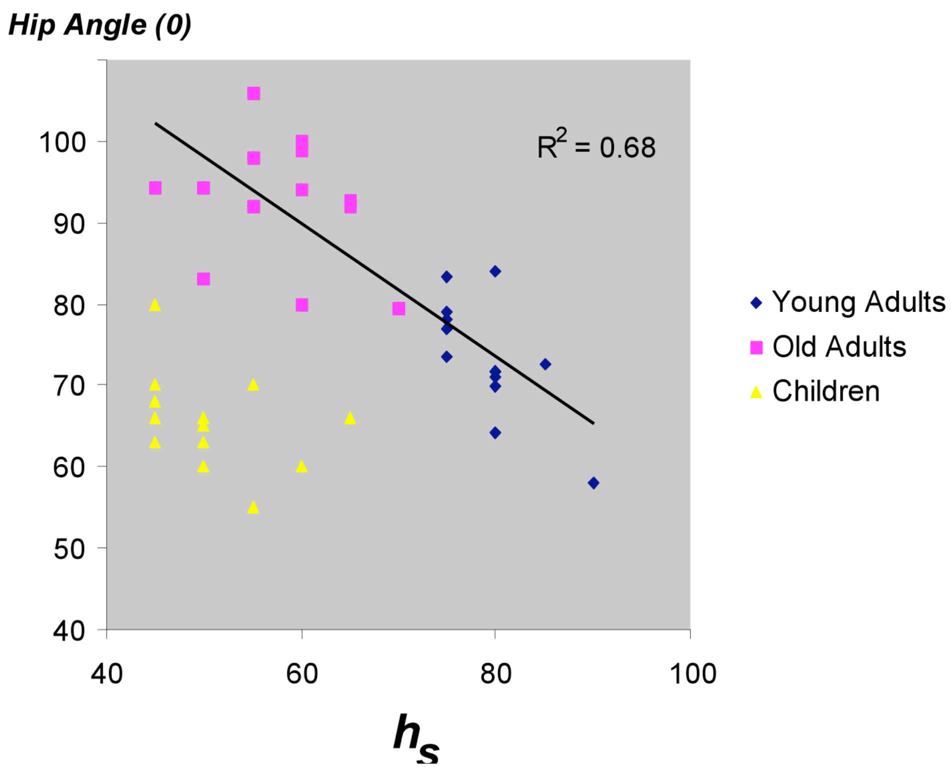
$\mathrm{sen}\alpha = h_s/I$

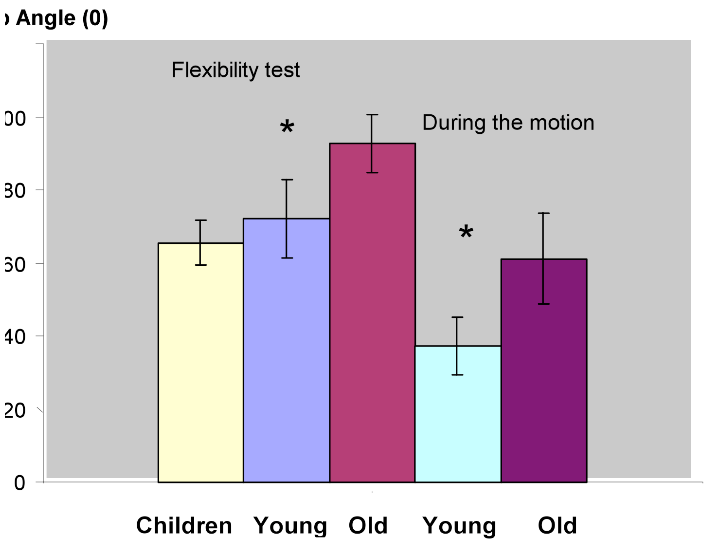


L’angolo α è una costante percettivo-motoria

- Il rapporto fra l’altezza salita e l’ipotenusa è fortemente lineare ($R^2=0.97$) quindi il valore della linea è da considerare costante quindi costante è l’angolo α

Flessibilità





Discesa delle scale

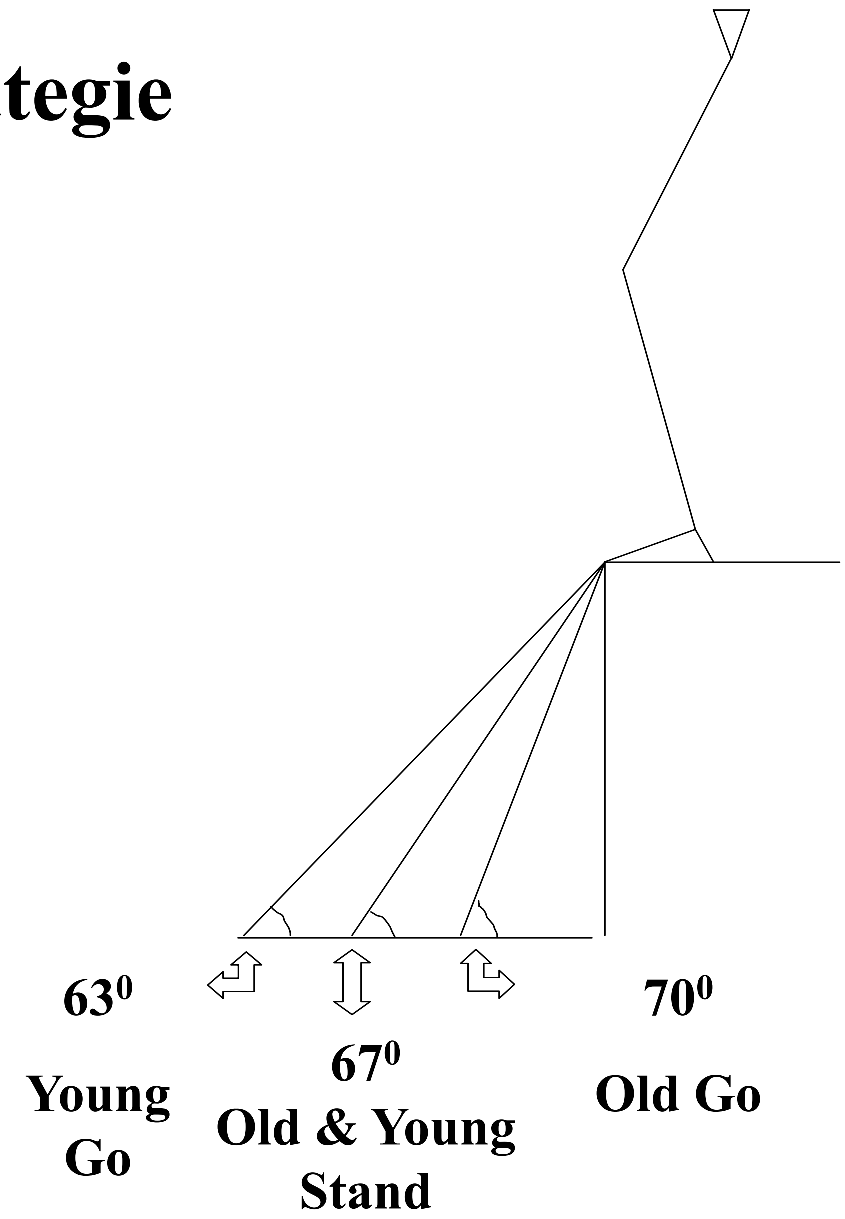
- 11 Anziani (età M=61.6, SD=7.3)
- 14 Giovani (età M=22.4, SD=1.6).
- Due condizioni:
  - Scendi e stai
  - Scendi e vai (raggiungi quel punto a 3m di distanza)

Discesa delle scale

- 11 Anziani (età M=61.6, SD=7.3)
- 14 Giovani (età M=22.4, SD=1.6).
- Due condizioni:
  - Scendi e stai
  - Scendi e vai (raggiungi quel punto a 3m di distanza)

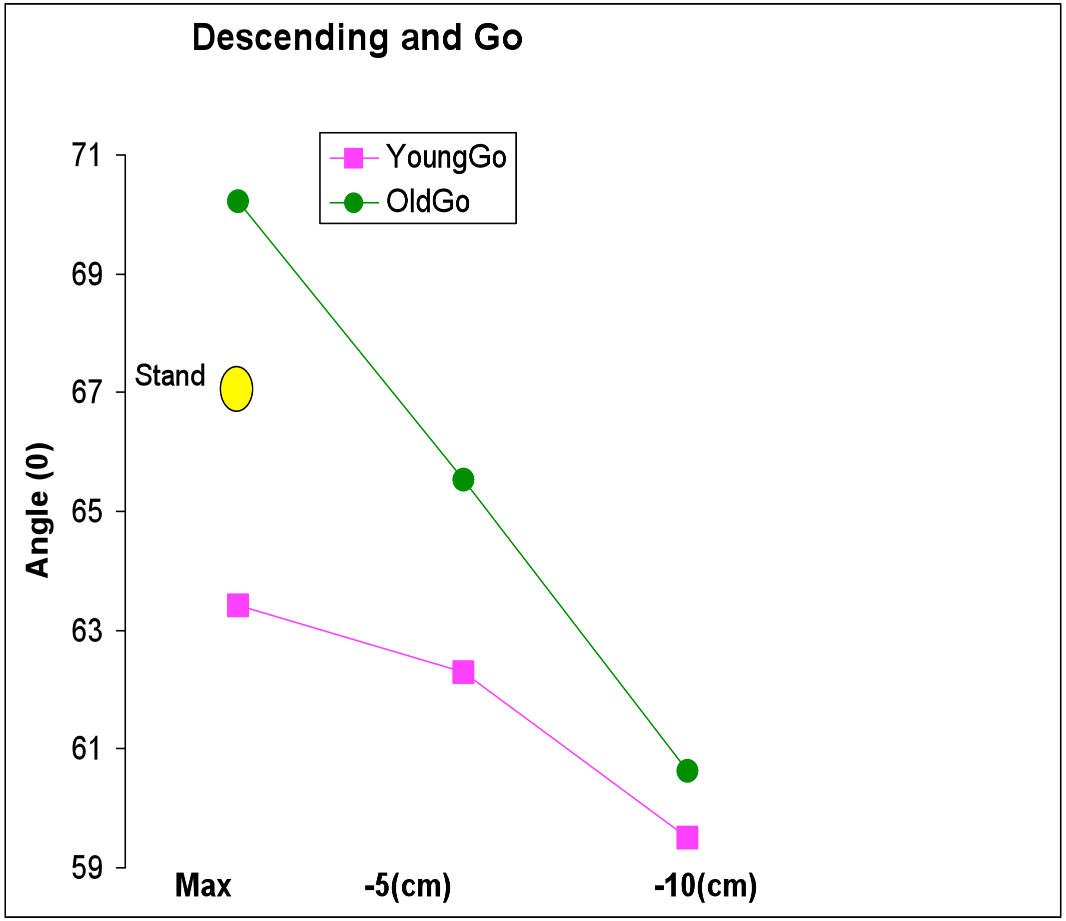
Le due strategie

- **Scendi e stai:** stesso angolo
- **Scendi e vai:** anziani atterrano più vicino allo scalino giovani più lontano



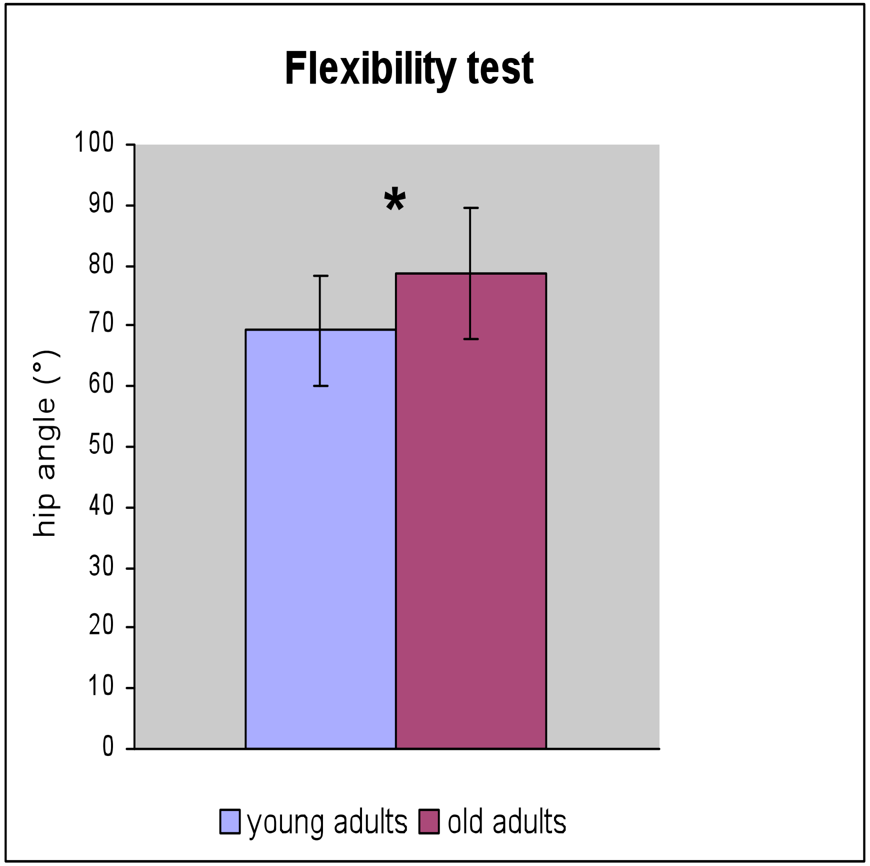
Le due strategie di movimento

- **Scendi e stai**: nessuna differenza fra I due gruppi
- **Scendi e vai**:
  - Diversi gli angoli scelti fra anziani e giovani



Test di flessibilità

Anziani presentano una flessibilità al livello delle anche inferiore ai giovani



Due strategie diverse

- Anziani più in difficoltà a gestire la loro quantità di moto: scelgono strategie più conservative per mantenersi più stabili