

# Introduzione alla Statistica

*(Metodo delle Scienze Empiriche)*

Distribuzioni di Frequenza  
Percentili

Sezione di Epidemiologia e Statistica Medica  
Università degli Studi di Verona

## Distribuzione di Frequenza

E' molto difficile ricavare a prima vista delle informazioni utili da un grande database. E' quindi più conveniente sintetizzare le variabili in tabelle note come “**distribuzioni di frequenza**”.

La **frequenza** ( $n$ ,  $f$ ) di un particolare livello di una variabile è il numero di volte che quel livello compare nell'insieme di dati. Il livello viene definito come **modalità** per le variabili qualitative e **valore** per le variabili quantitative.

Una **distribuzione di frequenza** è una tabella che riporta nella 1° colonna i livelli assunti dalla variabile e nella 2° colonna le frequenze corrispondenti. In altre parole una distribuzione di frequenza mostra sia i livelli che una variabile può assumere che il numero di unità statistiche con quel livello.

- Le distribuzioni di frequenza possono essere utilizzate con le variabili sia qualitative che quantitative.
- Non è necessaria alcuna trasformazione dei dati per creare la distribuzione di frequenza di una **variabile qualitativa** (nominale od ordinale) o di una **variabile quantitativa discreta**. Semplicemente ciascun livello della variabile viene associato con la frequenza corrispondente.
- Nel caso delle **variabili quantitative continue**, non è possibile associare una frequenza distinta ad ogni valore in quanto la variabile stessa può assumere un numero infinito di valori nell'ambito del suo campo di variazione. Pertanto le variabili continue vengono discretizzate, ovvero ricodificate in intervalli di classe.

## Distribuzione di Frequenza *Variabile Qualitativa*

**ESEMPIO: V.C. Colore degli Occhi**

Modalità	Frequenza		
	Assoluta ( $n_i$ )	Relativa ( $p_i, f_i$ )	Percentuale (%)
Castani	500	0,714 <i>(500/700)</i>	71,4%
Azzurri	100	0,143 <i>(100/700)</i>	14,3%
Verdi	100	0,143 <i>(100/700)</i>	14,3%
<b>Totale (<math>\Sigma_i</math>)</b>	<b>700</b>	<b>1</b>	<b>100%</b>

### **Proprietà:**

- Esaustività
- Esclusività  
(*non ambiguità*)



Nella classificazione dei soggetti la distribuzione di frequenza deve essere **esaustiva** (vanno riportati tutti i valori assunti dalla variabile) e **non-ambigua** (ogni soggetto deve appartenere ad una sola classe).

Le categorie dovrebbero essere **mutuamente esclusive**, ovvero non-sovrapposte. Un'unità statistica deve essere assegnata ad una sola categoria: per esempio, un gay o una lesbica non possono essere assegnati ad entrambi i sessi, un gay è un uomo e una lesbica è una donna.

Le classi devono essere **esaustive**, ovvero devono coprire l'intero range dei dati: per esempio, un *intersex* (intersessuale) richiede una classe apposita per essere classificato.

**E  
S  
E  
M  
P  
I  
O**

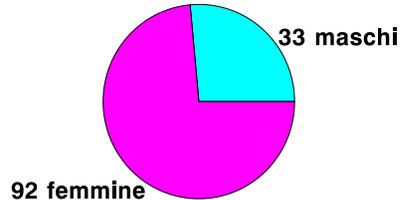
**VARIABILE QUALITATIVA = SESSO**

Ci sono 16 maschi fra gli specializzandi e 33 fra le matricole di Medicina (FREQUENZE ASSOLUTE, n).  
Se consideriamo le frequenze assolute, i maschi tra gli specializzandi sono la metà rispetto ai maschi tra le matricole di Medicina.

**SPECIALIZZANDI**



**MATRICOLE di MEDICINA**



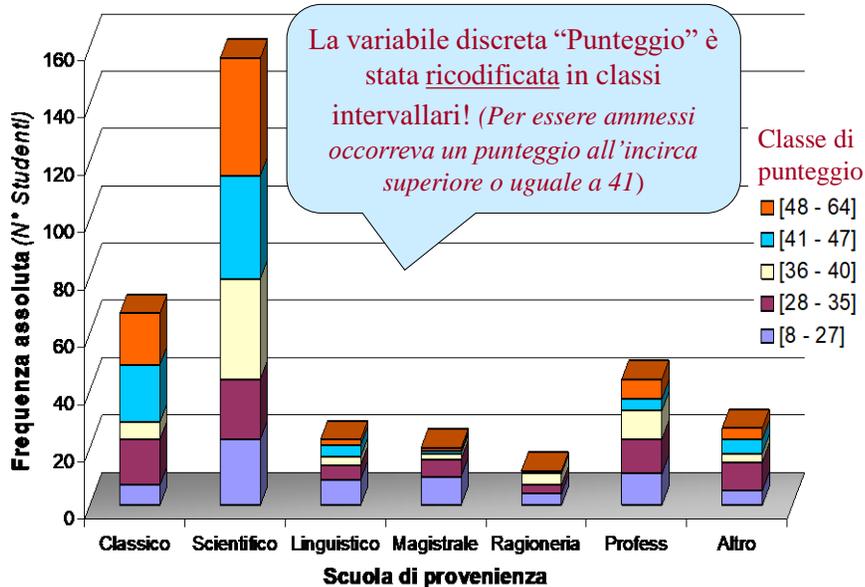
**FREQUENZE RELATIVE (f,p)**

$16/33 = 48,5\%$

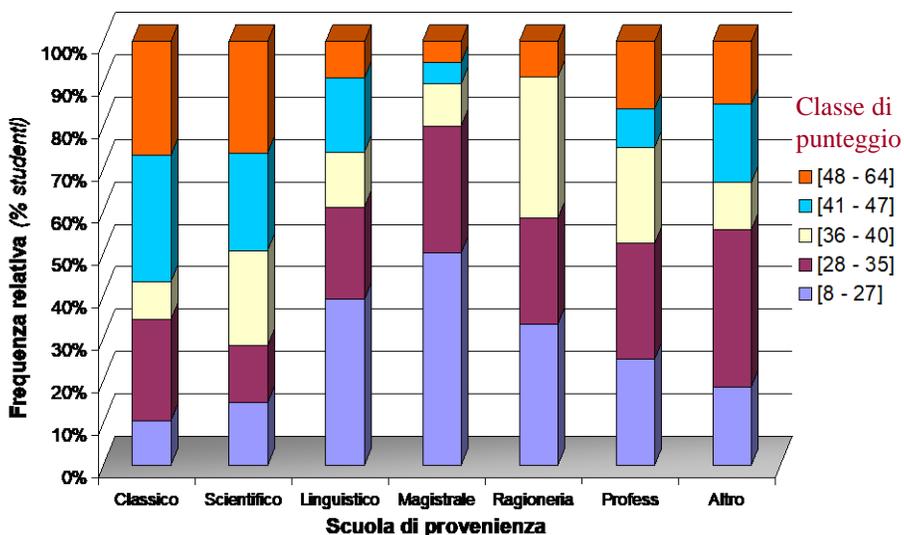
$33/125 = 26,4\%$

In realta', il sesso maschile e' molto piu' frequente tra gli specializzandi che non tra le matricole di medicina.

### Distribuzione di frequenza assoluta dei punteggi al test degli studenti di Medicina, per scuola di provenienza (a.a. 95/96)



### Distribuzione di frequenza relativa dei punteggi al test degli studenti di Medicina, per scuola di provenienza (a.a. 95/96)



## DISTRIBUZIONE di FREQUENZA di DUE VARIABILI QUALITATIVE

<u>Variabile:</u> Colore degli Occhi	Modalità	Frequenza	
		Assoluta N	Percentuale %
	Scuri	120	80%
	Chiari	30	20%
	Totale	150	100%

<u>Variabile:</u> Colore dei Capelli	Modalità	Frequenza	
		Assoluta N	Percentuale %
	Scuri	110	73,3%
	Chiari	40	26,7%
	Totale	150	100%

## TABELLE di CONTINGENZA 2 x 2 (Fourfold Tables)

		Colore occhi		
		Scuri	Chiari	
Colore capelli	Scuri	100 (90.9%)	10 (9.1%)	110 (100%)
	Chiari	20 (50%)	20 (50%)	40 (100%)
		120	30	150

Le frequenze marginali corrispondono alle frequenze delle distribuzioni di frequenza univariata.

## TABELLE di CONTINGENZA 2 x 2 (Fourfold Tables)

		Colore occhi		
		Scuri	Chiari	
Colore capelli	Scuri	100 <i>(90.9%)</i>	10 <i>(9.1%)</i>	110 <i>(100%)</i>
	Chiari	20 <i>(50%)</i>	20 <i>(50%)</i>	40 <i>(100%)</i>
		120	30	150

Frequenze  
Congiunte

100 soggetti si trovano all'incrocio tra la prima riga (capelli scuri) e la prima colonna (occhi scuri). Pertanto hanno sia gli occhi che i capelli scuri.

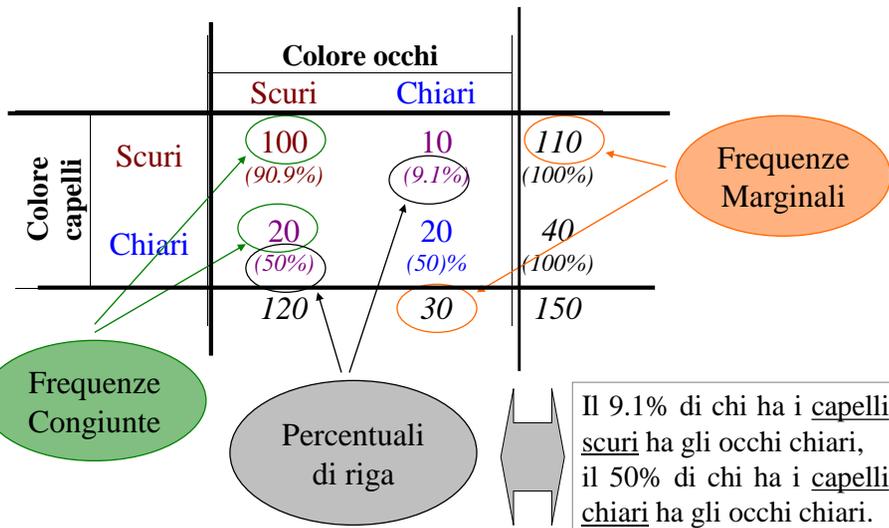
## TABELLE di CONTINGENZA 2 x 2 (Fourfold Tables)

		Colore occhi		
		Scuri	Chiari	
Colore capelli	Scuri	100 <i>(90.9%)</i>	10 <i>(9.1%)</i>	110 <i>(100%)</i>

Percentuali  
di riga

Per calcolare una percentuale di riga mi concentro su una sola riga (la prima o la seconda) come se costituisse da sola l'intero campione.

**TABELLE di CONTINGENZA 2 x 2**  
(*Fourfold Tables*)



**ESERCIZIO:** Costruzione di una tabella di contingenza 2\*2

**DATI:** Abbiamo 1000 individui anziani, 100 sono diabetici e 300 sono ipertesi. 70 individui hanno sia il diabete che l'ipertensione.

	Iperteso	Normoteso	
Diabetico	70	30	100
Non-diabetico	230	670	900
	300	700	1000

% di ipertesi fra i diabetici =  $70/100 = 0,70 = 70\%$

% di ipertesi fra i non- diabetici =  $230/900 = 0,256 = 25,6\%$

**CONCLUSIONE:** Il diabete e l'ipertensione sono due malattie fortemente collegate.

**Esperimento di Mendel:  
incrocio di piselli lisci e gialli (caratteri dominanti) e  
rugosi e verdi (caratteri recessivi),  
e incrocio degli ibridi di I generazione.**

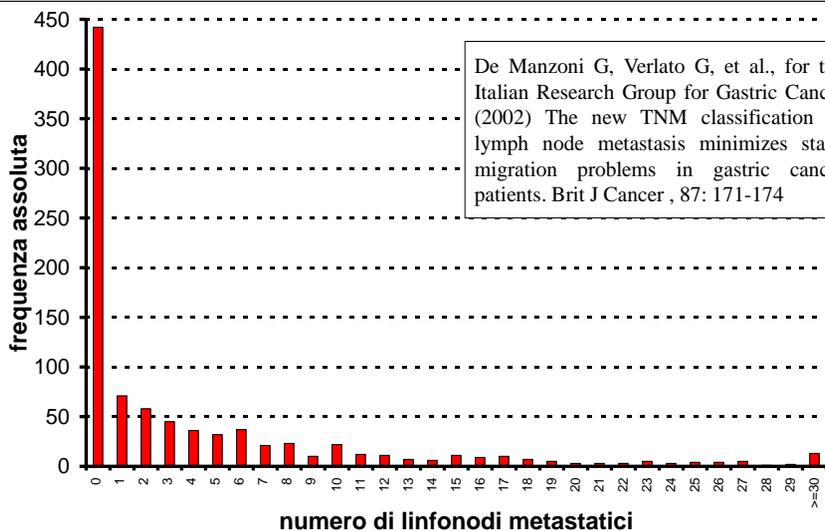
	<b>giallo</b>	<b>verde</b>	
<b>Liscio</b>	<b>315</b>	<b>108</b>	<b>423</b>
<b>Rugoso</b>	<b>101</b>	<b>32</b>	<b>133</b>
	<b>416</b>	<b>140</b>	<b>556</b>

% di piselli verdi fra i piselli lisci =  $108/423 = 0,255 = 25,5\%$

% di piselli verdi fra i piselli rugosi =  $32/133 = 0,241 = 24,1\%$

**CONCLUSIONE:** I caratteri “caratteristiche della superficie” e “colore” si segregano indipendentemente l’uno dall’altro (**III legge di Mendel**)

**Linfonodi metastatici in 921 pazienti con Ca. gastrico**  
*(rappresentazione grafica di una variabile quantitativa discreta - diagramma a barre)*



**PESO, STATURA e SESSO delle MATRICOLE di MEDICINA  
dell'UNIVERSITA' di VERONA nell'A.A. 95/96**

PESO STAT. SESSO			PESO STAT. SESSO			PESO STAT. SESSO		
Kg	cm		Kg	cm		Kg	cm	
56	159	F	77	192	M	51	171	F
66	169	F	60	173	F	48	156	F
50	160	F	78	182	M	55	167	F
53	170	F	52	167	F	60	177	M
54	168	F	47,5	164	F	58	170	F
53	161	F	64	166	F	67	167	F
63	172	M	52	160	F	50	172	F
53	170	F	72	184	M	58	169	F
62	161	F	48	169	F	77	179	M
56	163	F	66	170	M	52	162	M
50	160	F	55	172	F	49	160	F
52	170	F	67	177	M	49	165	F
58	173	F	66	170	M	62	178	M
52	167	F	50	160	F	68	174	M
73	178	M	51	167	F	75	181	M
57	166	F	95	193	M	48	167	F
52	165	F	58	160	F	53	160	F
56	171	F	67	178	F	49	167	F
67	175	M	67	175	M	52	165	F
63	182	F	60	160	F	55	155	F
55	169	F	56	165	F	84	188	M
58	165	F	50	165	F	56	170	F
55	175	M	52	170	F	60	171	F
66	176	M	58	172	F	52	176	M
55	164	F	60	170	F	62	180	F
47	160	F	54	166	F			
47	155	F	60	165	F			
63	169	M	74	172	M			
61	177	F	53	173	F			
53	170	F	72	183	M			
55	168	M	52	168	F			
53	162	F	51	164	F			
62	162	F	81	176	M			
45	160	F	50	160	F			
57	167	F	51	171	F			
45	158	F	64	180	F			
53	168	F	82	183	M			
50	160	F	47	156	F			
55	162	F	70	175	M			
70	177	M	58	168	F			
64	178	F	59	173	F			
52	164	F	68	165	F			
75	175	M	63	177	F			
75	178	M	50	159	F			
70	165	F	65	150	F			
58	167	F	60	170	F			
45	160	F	51	167	F			
50	167	F	75	182	M			
56	156	F	62	170	M			
59	165	F	85	174	M			

**Distribuzione di frequenza o Seriazione della  
variabile quantitativa continua Statura**

```
fre var=statura.
-----
```

STATURA	Value	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
	150	1	.8	.8	.8
	155	2	1.6	1.6	2.4
	156	3	2.4	2.4	4.8
	158	1	.8	.8	5.6
	159	2	1.6	1.6	7.2
	160	13	10.4	10.4	17.6
	161	2	1.6	1.6	19.2
	162	4	3.2	3.2	22.4
	163	1	.8	.8	23.2
	164	4	3.2	3.2	26.4
	165	10	8.0	8.0	34.4
	166	3	2.4	2.4	36.8
	167	11	8.8	8.8	45.6
	168	5	4.0	4.0	49.6
	169	5	4.0	4.0	53.6
	170	12	9.6	9.6	63.2
	171	4	3.2	3.2	66.4
	172	5	4.0	4.0	70.4
	173	4	3.2	3.2	73.6
	174	2	1.6	1.6	75.2
	175	5	4.0	4.0	79.2
	176	3	2.4	2.4	81.6
	177	5	4.0	4.0	85.6
	178	5	4.0	4.0	89.6
	179	1	.8	.8	90.4
	180	2	1.6	1.6	92.0
	181	1	.8	.8	92.8
	182	3	2.4	2.4	95.2
	183	2	1.6	1.6	96.8
	184	1	.8	.8	97.6
	188	1	.8	.8	98.4
	192	1	.8	.8	99.2
	193	1	.8	.8	100.0
Total		125	100.0	100.0	

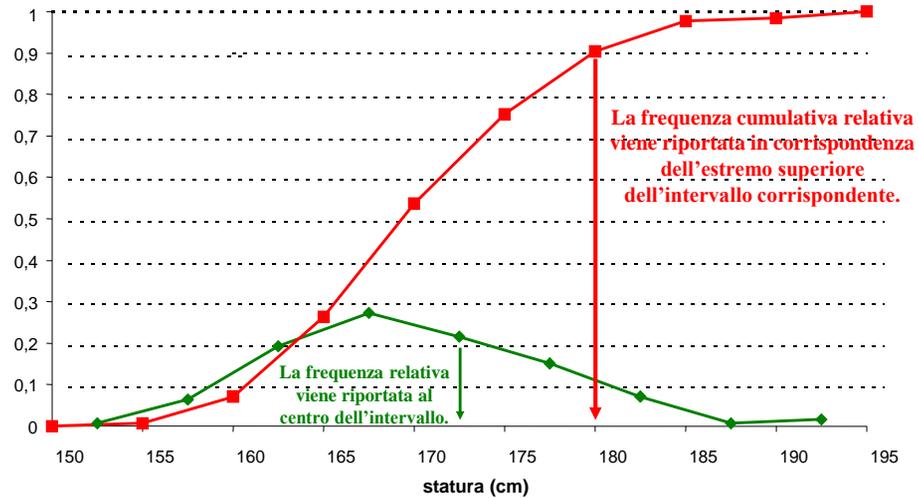
## COSTRUZIONE DI UNA DISTRIBUZIONE DI FREQUENZA CON UNA VARIABILE QUANTITATIVA CONTINUA

1) Trovare il valore minimo e il valore massimo	Valore minimo = 150 cm Valore massimo = 193 cm
2) Calcolare il campo di variazione (range) = valore max – valore min	193 cm – 150 cm = 43 cm
3) Stabilire il numero delle classi: tra 5 (pochi individui) e 20 (molti individui)	9 classi
4) Salvo casi particolari, le classi devono avere la stessa ampiezza	
5) Stabilire l'ampiezza dell'intervallo di classe	$43 / 9 = 4,78 \text{ cm} \approx 5 \text{ cm}$
6) Si costruiscono gli intervalli di classe, che devono essere mutuamente esclusivi ed esaustivi	I intervallo: 150,0-154,9 cm II intervallo: 155,0-159,9 cm III intervallo: 160,0-164,9 cm
7) Si conta il numero di individui in ogni classe	I classe: 1 II classe: 8 III classe: 24

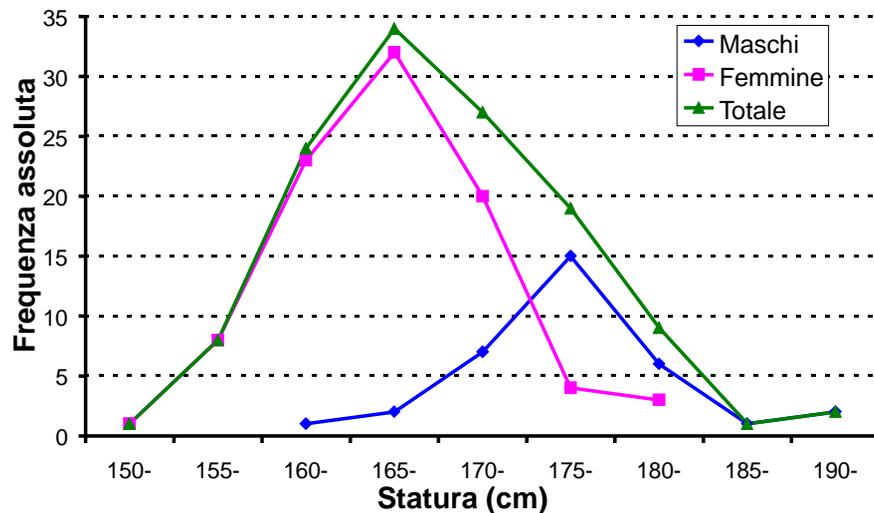
```
compute statCLAS=trunc((statura-145)/5).
fre var=statCLAS.
```

CLASSE	FREQUENZA		FREQUENZA CUMULATIVA	
	ASSOLUTA	RELATIVA %	ASSOLUTA	RELATIVA %
[150-155)	1	1/125= 0,8	1	1/125= 0,8
[155-160)	8	8/125= 6,4	1+8= 9	9/125= 7,2
[160-165)	24	24/125=19,2	1+8+24=33	33/125=26,4
165-169,9	34	34/125=27,2	1+8+24+34=67	67/125=53,6
170-174,9	27	21,6	94	75,2
175-179,9	19	15,2	113	90,4
180-184,9	9	7,2	122	97,6
185-189,9	1	0,8	123	98,4
190-194,9	2	1,6	125	100,0
Totale	125	100,0		

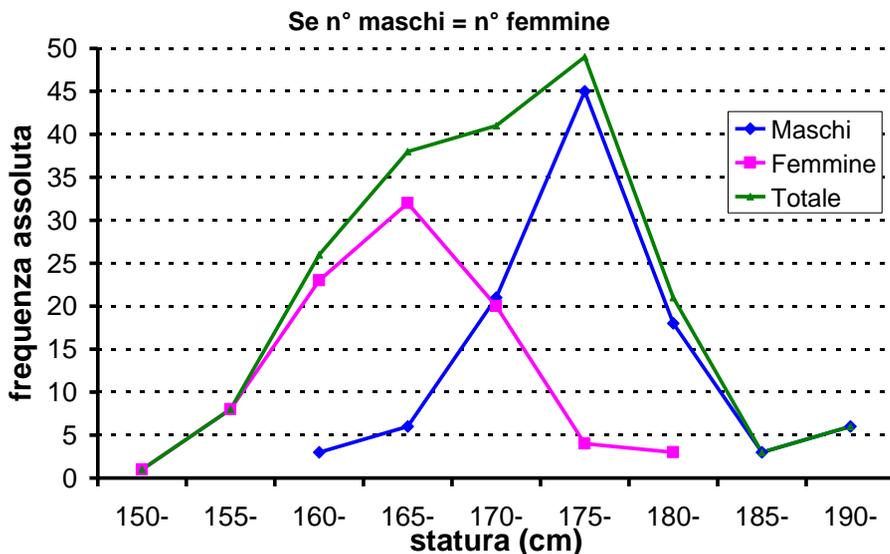
Statura matricole della Facoltà di Medicina (a.a. 95/96)  
(rappresentazione grafica - poligoni di frequenza)



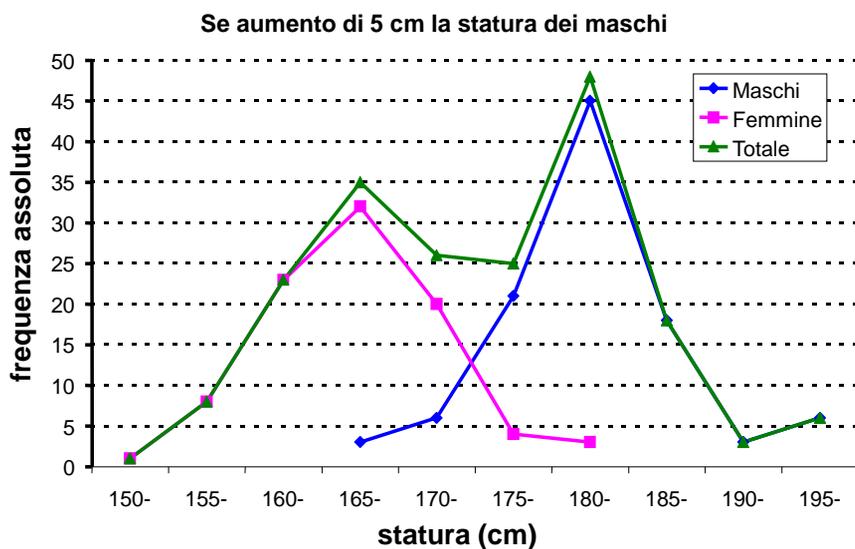
Statura matricole della Facoltà di Medicina  
(a.a. 95/96), per sesso e per il totale (a)



Statura matricole della Facoltà di Medicina  
(a.a. 95/96), per sesso e per il totale (b)



Statura matricole della Facoltà di Medicina  
(a.a. 95/96), per sesso e per il totale (c)



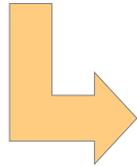
## COSTRUZIONE di una DISTRIBUZIONE di FREQUENZA

### Costruzione degli intervalli di classe

$$\delta_i = \text{Range} / k$$

$\delta_i$  = ampiezza intervallo

$k$  = n° intervalli



range: 160-192 cm	
numero degli intervalli di classe = 5	
Statura (cm)	ampiezza degli intervalli = (192-160)/5=32/5=6.4 ≈ 7
166 164 170 192 160 174 186 176 160 165 165 173 179 168 168	intervalli di classe 160-166.9 cm 167-173.9 cm 174-180.9 cm 181-187.9 cm 188-194.9 cm
Statura (cm)	n    p    N    P
160-166.9	6   0.40   6   0.40
167-173.9	4   0.26   10   0.67
174-180.9	3   0.20   13   0.86
181-187.9	1   0.07   14   0.93
188-194.9	1   0.07   15   1.00

## Costruzione degli intervalli di classe

- A) H. Sturges nel 1926, sulla base del numero di osservazioni  $N$ , ha indicato il numero ottimale di classi  $C$ :

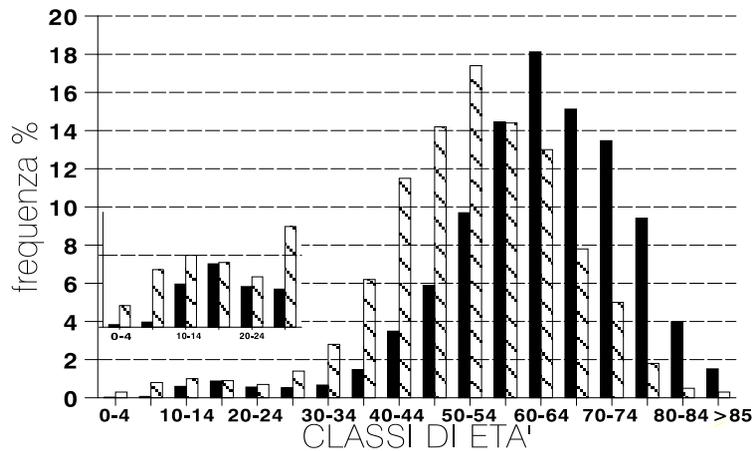
$$C = 1 + \frac{10}{3} \cdot \log_{10}(N)$$

- B) D. Scott nel 1979 ha determinato l'ampiezza ottimale  $h$  delle classi (dalla quale ovviamente dipende direttamente anche il numero di classi  $C$ ), mediante la relazione (*dove  $S$  = deviazione standard*):

$$h = \frac{3,5 \cdot S}{\sqrt{N}}$$

Da: <http://www.dsa.unipr.it/soliani/capu1.pdf>

## MASCHI DIABETICI a VERONA al 31.12.1986



■ ETA' ATTUALE □ ETA' ALLA DIAGNOSI  
 N.B.: 100 % = TUTTI I MASCHI DIABETICI

Muggeo M, Verlato G, ..., de Marco R (1995) The Verona Diabetes Study: a population-based survey on known diabetes mellitus prevalence and 5-year all-cause mortality. *Diabetologia*, 38: 318-325

**Il rango assoluto è la posizione occupata da un'unità statistica in una serie ordinata. In statistica in genere le serie vengono ordinate in senso crescente.**

**Se due o più individui (unità statistiche) hanno lo stesso valore, si assegna ad essi il rango medio delle posizioni da essi occupate.**

<b>RANGO</b>	1	2	3	4	5
<b>NUMERI</b>	3	4	4	5	6
		2,5	2,5		

<b>RANGO</b>	1	2	3	4	5
<b>NUMERI</b>	3	4	4	4	5
		3	3	3	

## Rango Percentilico

Il **rango percentilico** è la proporzione di punteggi in una distribuzione rispetto alla quale uno specifico valore è superiore o al limite uguale.

Per esempio, se un soggetto ottiene un punteggio pari a 95 in un test [...] e tale punteggio è superiore o almeno uguale ai punteggi ottenuti dall'88 % degli studenti che hanno sostenuto il medesimo test, allora il rango percentilico di quel soggetto è 88. Il soggetto rientra dunque nell'88-esimo percentile.

Un ragazzo ha la glicemia di 90 mg/dl.

Nella sua scuola ci sono 700 ragazzi.

Se ordiniamo la glicemia in ordine crescente questo ragazzo occupa la posizione 500 (rango assoluto).

Rango assoluto varia in questo caso tra 1 (coma ipoglicemico) e 700 (diabetico di tipo 1 mal controllato).

Qual è il rango percentilico (%)?

$$500/(700+1) = 500/701 = 0,713 = 71,3 \%$$

$$\text{RangoPercentilico (\%)} = 100 * \text{RangoAssoluto}/(n+1)$$

$$\text{RangoAssoluto} = (n+1) * \text{RangoPercentilico}/ 100$$

Consideriamo un soggetto che ha rango assoluto 50, rispettivamente in un gruppo di 99 soggetti o di 100 soggetti.

	N=99	N=100
Soggetti con rango maggiore	49 (dal 51 al 99)	50
	50	50
Soggetti con rango minore	49 (dall'1 al 49)	49
Rango perc =	$50/(99+1)=50\%$	$50/(100+1)=49,5\%$
Calcoli errati =	$50/99=50,5\%$	$50/100=50\%$

## Percentile

I **percentili** sono quei 99 valori che dividono una distribuzione in 100 parti uguali.

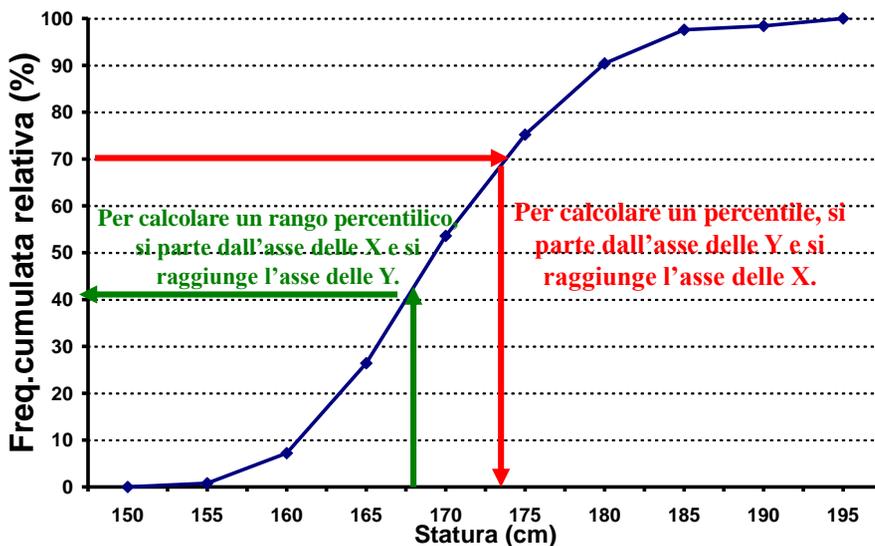
**N.B.** I **quartili** sono quei 3 valori che dividono una distribuzione in 4 parti uguali:

1° quartile = 25° percentile

2° quartile = 50° percentile

3° quartile = 75° percentile

Statura matricole della Facoltà di Medicina (a.a. 95/96)  
(rappresentazione grafica - poligoni di frequenza)



**RANGO PERCENTILICO = CARATTERISTICA DI UN  
DETERMINATO INDIVIDUO**  
**PERCENTILE = CARATTERISTICA della POPOLAZIONE**

**ESEMPIO:**

**Un individuo pesa 100 Kg. Il suo rango percentilico è 96%. Il 96% degli altri individui pesa meno di lui o come lui e il 4% pesa più di lui.**

**Nella stessa popolazione qual è il 96esimo percentile? 100 Kg.**

**L'individuo con rango percentilico 96% si trova esattamente sul 96esimo percentile della popolazione (100 Kg).**

## Calcolo del $k$ -esimo percentile - 1

(Dati individuali disponibili)

- Si individua il rango assoluto corrispondente al  $k$ -esimo percentile

$$\text{Rango Assoluto} = (n + 1) * k / 100$$

quindi si riporta il valore dell'osservazione, cui corrisponde quel determinato rango

### Esempio

la mediana di un campione di 99 individui ha **rango**:

$$(99 + 1) * 50 / 100 = 50$$

il  $k$ -esimo percentile sarà il valore osservato per la variabile di interesse nell'individuo (più in generale *unità statistica*) con rango 50

## Esempio

Qual è il 40esimo percentile della statura nelle matricole di Medicina di Verona nell'anno accademico 1995/96 ?

- 1) Trovo il rango assoluto corrispondente al  $k$ -esimo percentile

$$\text{Rango Assoluto} = (125 + 1) * 40 / 100 = 126 * 0,4 = 50,4$$

- 2) Le osservazioni, con rango assoluto 50 e 51, valgono entrambe 167 cm.

$$\mathbf{X_{40} = 167 \text{ cm}}$$

## Calcolo del $k$ -esimo percentile - 2

(Dati disponibili in classi sotto forma di tabella di frequenza)

- Si individua la classe che contiene il  **$k$ -esimo percentile**, ovvero la classe in cui la frequenza relativa cumulativa supera o coincide con il  $k$  per cento
- quindi si procede operando una **interpolazione lineare**

$$x_k = u_{i-1} + \frac{k - F(u_{i-1})}{F(u_i) - F(u_{i-1})} * \delta_i$$

$k$  = rango percentilico

$x_k$  =  $k$ -esimo percentile della distribuzione

$u_{i-1}$  = limite inferiore dello  $i$ -esimo intervallo

$u_i$  = limite superiore dello  $i$ -esimo intervallo

$F(u_{i-1})$  = frequenza cumulativa dell'intervallo precedente

$F(u_i)$  = frequenza cumulativa dell'  $i$ -esimo intervallo

$\delta_i$  = ampiezza dello  $i$ -esimo intervallo

Si assume che all'interno della classe i soggetti siano distribuiti **uniformemente!**

### Esempio

Qual è il 40esimo percentile della statura nelle matricole di Medicina di Verona nell'anno accademico 1995/96 ?

Il 40esimo percentile cade nella IV classe (165-169,9 cm)

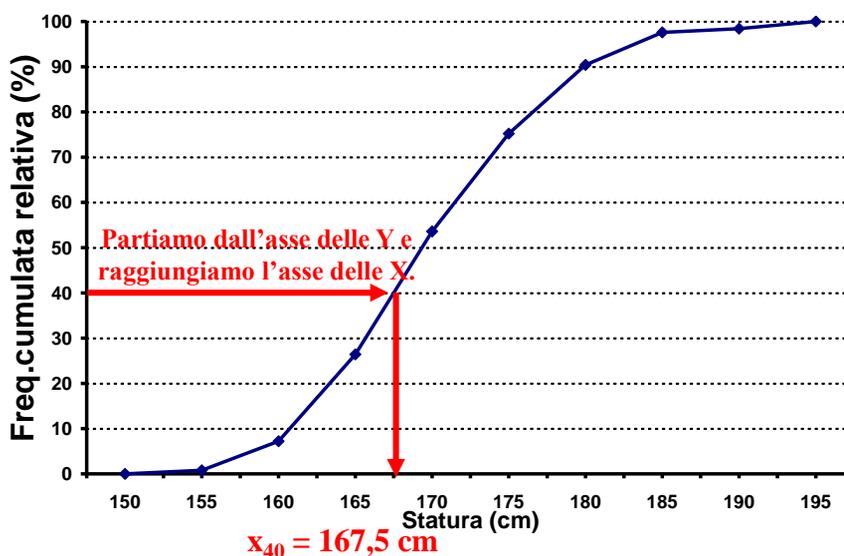
$$\begin{aligned} X_{40} &= 165 + 5 * \frac{40\% - 26,4\%}{53,6\% - 26,4\%} = 165 + 5 * \frac{13,6\%}{27,2\%} = \\ &= 165 + 5 * 0,5 = 165 + 2,5 = 167,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

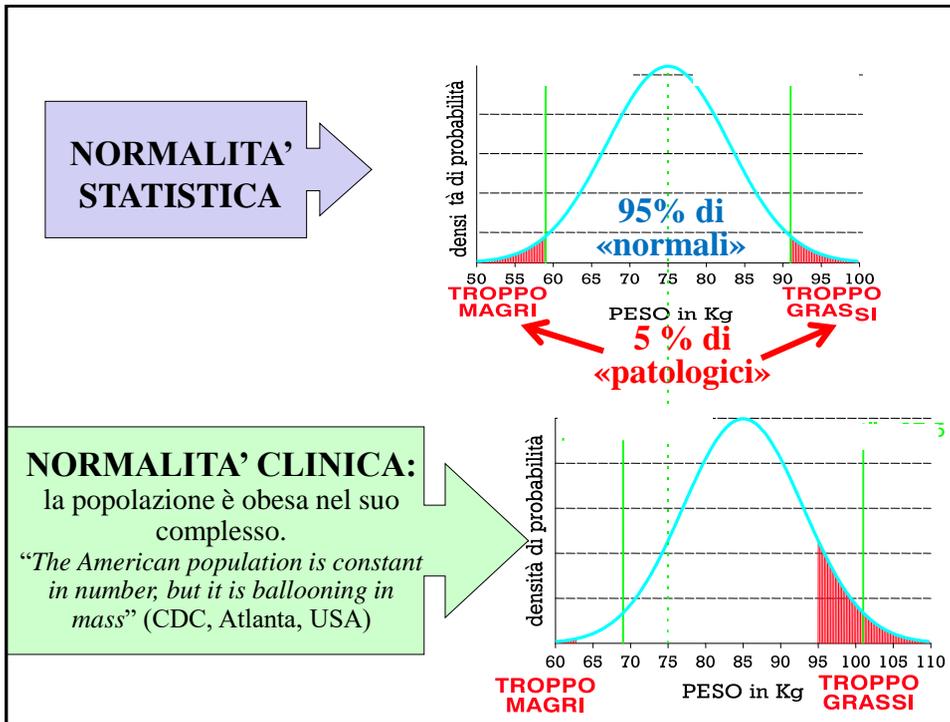
## Calcolo del $k$ -esimo percentile – 3

(Dati non disponibili, si dispone solamente della rappresentazione grafica della frequenza relativa cumulativa)

- Sull'asse delle ordinate (Y), dove è rappresentata la frequenza relativa cumulata, si individua il punto corrispondente al **rango percentilico ( $k$ )**
- da qui si traccia una linea orizzontale, che intersechi la linea cosiddetta spezzata, che rappresenta l'andamento della frequenza relativa cumulata
- dal punto d'intersezione così individuato, si traccia una linea verticale fino all'intersezione con l'asse delle ascisse (X), che rappresenta i valori della variabile oggetto dello studio
- il valore della variabile in corrispondenza del punto d'intersezione con le X rappresenta il  **$k$ -esimo percentile**

Statura matricole della Facoltà di Medicina (a.a. 95/96)  
Troviamo il 40esimo percentile usando il metodo grafico





RAPPRESENTAZIONE SINTETICA delle VARIABILI, per via grafica e/o analitica		
TIPO VARIABILE	RAPPRESENTAZIONE ANALITICA	RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
Categorica	TABELLA  di  FREQUENZA	Istogramma Torta ( <i>Pie</i> ) Diagramma a Barre
Quantitativa discreta		Diagramma a Barre
Quantitativa continua		<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px;">           Diagramma Stem-and leaf         </div> <div>           Istogramma a canne d'organo            Poligono di frequenza            Box-and-Whiskers plot         </div> </div>

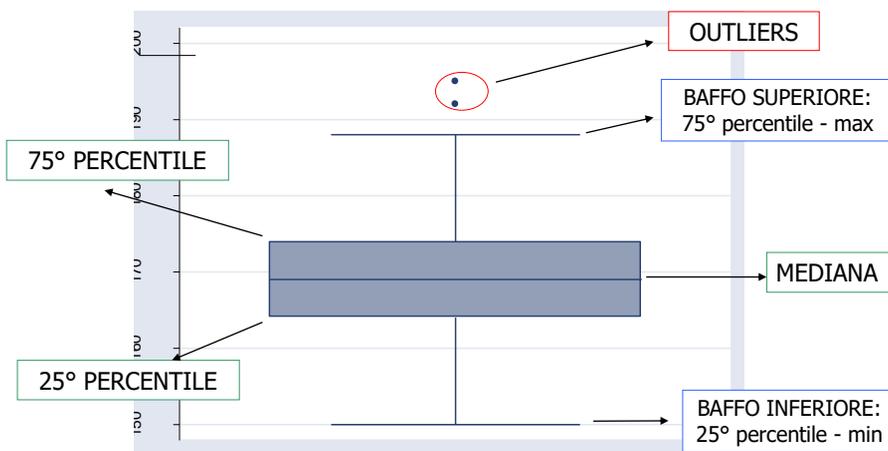
examine statura/percentiles (2.5 25 50 75 97.5).

-----  
**STEM-AND-LEAF DIAGRAM (DIAGRAMMA TRONCO E FOGLIE)**  
 -----

n	STEM LEAVES	NUMERI RAPPRESENTATI
1	15 0	150
8	15 55666899	155, 155, 156, 156, 156, 158, 159, 159
24	16 000000000000011222234444	
34	16 555555555566677777777778888899999	
27	17 000000000000111122222333344	
19	17 555566677777888889	
9	18 001222334	
1	18 8	188
2	19 23	192, 193

-----  
 Stem width: 10  
 Each leaf: 1 case(s)  
 -----

**RAPPRESENTAZIONE GRAFICA MEDIANTE BOX-WHISKERS PLOT**  
 (GRAFICO SCATOLA E BAFFI)



La lunghezza massima di un baffo è  $1.5 \times$  distanza interquartilica. I valore situati oltre questo limite vengono considerati outliers (osservazioni anomale) e rappresentati con dei punti