CINEMATICA DIRETTA

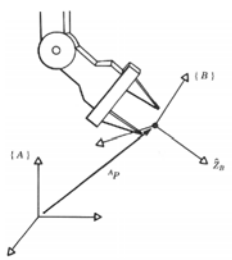
Paolo Fiorini
Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Verona

Introduzione

Manipolatore: catena cinematica (aperta) di corpi rigidi (bracci) e giunti (rotoidali e prismatici)

Per poter manipolare un oggetto nello spazio bisogna conoscere posizione e orientamento dell'organo terminale

La ***cinematica diretta*** calcola la posa dell'organo terminale in funzione dei parametri di giunto

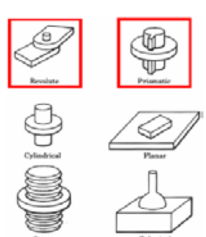


Giunti e Bracci

Giunto: il collegamento tra una coppia di corpi rigidi che permette un moto relativo caratterizzato da due due superfici che slittano l'una sull'altra

Giunto rotoidale
Giunto prismatico

Braccio: è un corpo rigido che definisce le relazioni geometriche che intercorrono tra due giunti adiacenti del manipolatore

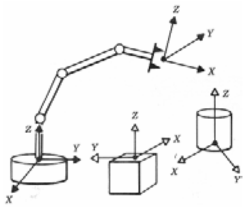


Il Problema

Problema

Dati i parametri geometrici del manipolatore e le variabili di giunto

Calcolare posa e orientazione del manipolatore



Soluzione

Applicare un insieme di sistemi di riferimento al manipolatore e agli oggetti dell'ambiente seguendo la convenzione di Denanvit-Hartenberg

Trasformazione Omogenea Organo Terminale

Consideriamo un manipolatore da *n+1* bracci connessi da *n* giunti.

Posizione ed orientazione finale dell'organo terminale sono funzione solo dei valori assunti dalle variabili di giunto

$$T^0(q) = \begin{bmatrix} n^0(q) & s^0(q) & a^0(q) & p^0(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazione Omogenea Organo Terminale

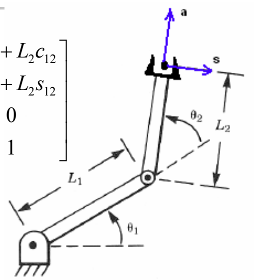
$$T^0(q) = \begin{bmatrix} n^0(q) & s^0(q) & a^0(q) & p^0(q) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dove:

- *q* è il vettore (nx1) delle variabili di giunto
- *n* è il versore normale dell'utensile terminale
- *a* è il versore di approccio
- *s* è il versore di scivolamento

Esempio

$$T^0(q) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Manipolatore planare a 2 braccia

N.B.

$s_{i...j} = \sin(\theta_i + ... + \theta_j)$

$c_{i...j} = \cos(\theta_i + ... + \theta_j)$

Convenzione di Denavit-Hartenberg

Definisce una procedura operativa per il calcolo della cinematica diretta sfruttando la natura di catena cinematica aperta del manipolatore

Ogni giunto connette solo due bracci consecutivi

⇓

•Consideriamo prima singolarmente il problema della descrizione geometrica dei legami tra due bracci consecutivi

•Successivamente risolviamo ricorsivamente il problema della descrizione dell'intero manipolatore

Convenzione di Denavit-Hartenberg

Definizione della posizione e orientamento relativi di due bracci consecutivi

⇓

Individuazione di terne solidali con tali bracci

⇓

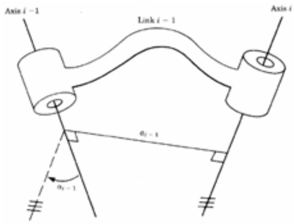
Calcolo della matrice di trasformazione che lega le due terne

D-H Definizione Parametri

Si identificano gli assi di rotazione dei giunti *i-1* ed *i*

Calcolo della distanza a_{i-1} tra i due assi di rotazione (normale comune)

Calcolo dell'angolo α_{i-1} di rotazione (sull'asse a_{i-1}) necessario per portare l'asse del primo giunto sul piano definito dal secondo asse e il segmento a_{i-1}

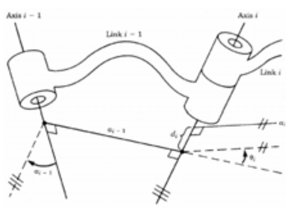


D-H Definizione Parametri

Calcolo della distanza d_i lungo l'asse *i* tra le due normali comuni α_{i-1} e α_i

(se il giunto è prismatico d_i è variabile)

Si calcola l'angolo di rotazione θ_i (sull'asse *i*) necessario per allineare a_{i-1} con a_i



(se il giunto è rotoidale θ_i è variabile)

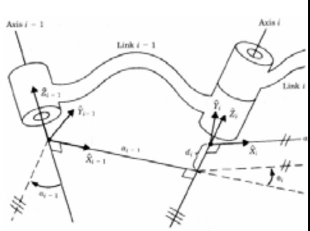
D-H Posizione delle Terne

L'origine del sistema *{i}* è posto sull'intersezione tra a_i e l'asse di giunto *i*

L'asse Z_i coincide con l'asse di giunto *i*

L'asse X_i coincide con la normale comune a_i

L'asse Y_i è scelto in modo da completare la terna



D-H Elenco dei Parametri

Se i sistemi di riferimento sono posti in base alla convenzione, si ha:

a_{i-1} – La distanza tra Z_{i-1} e Z_i misurata lungo l'asse X_{i-1}

α_{i-1} – L'angolo tra Z_{i-1} e Z_i misurato rispetto l'asse X_{i-1}

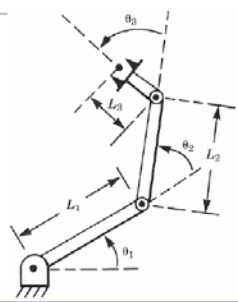
d_i – La distanza tra X_{i-1} e X_i misurato lungo l'asse Z_i

θ_i – L'angolo tra X_{i-1} e X_i misurato rispetto l'asse Z_i

Nota: $a_{i-1} \geq 0$, mentre α_{i-1} d_i e θ_i sono quantità con segno

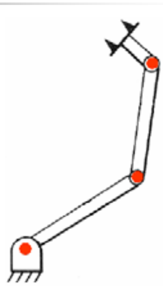
Esempio

Manipolatore planare a tre bracci e tre giunti rotoidali



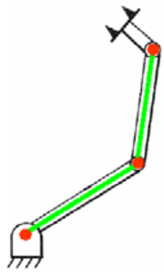
Esempio

Identificazione degli assi di rotazione dei giunti rotoidali



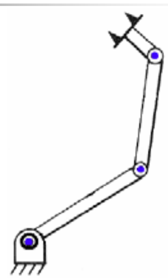
Esempio

Identificazione delle normali comuni agli assi di rotazione dei giunti



Esempio

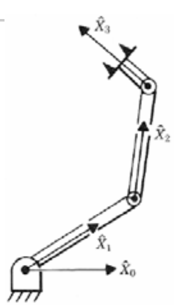
Definizione del verso degli assi Z_i dei sistemi di riferimento



Esempio

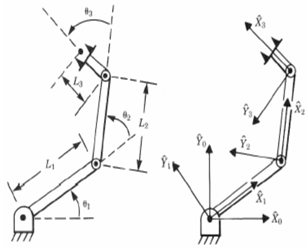
Assegnamo gli assi X_i allineandoli con le normali comuni e con il verso puntante l'asse del giunto successivo.

X_3 è allineato con il centro dell'organo terminale del manipolatore



Esempio

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

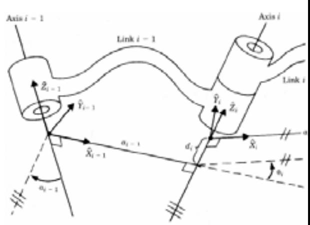


Il Problema (riassunto)

Problema

Determinare la trasformazione *R* che lega tra loro le terne dei sistemi di riferimento *{i}* e *{i+1}*

La trasformazione è funzione di quattro parametri: a_{i-1} α_{i-1} d_i θ_i di cui solo uno è variabile:

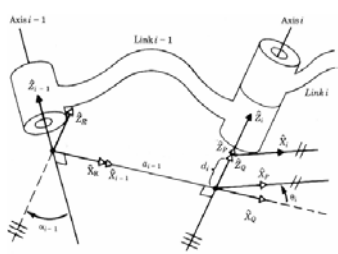


θ_i variabile per i giunti rotoidali, d_i per quelli prismatici

Composizione di Trasformazioni

Soluzione

Calcoliamo la trasformazione *T* come composizione di 4 trasformazioni elementari



Quattro Trasformazioni)

Si definiscono tre sistemi di riferimento intermedi *{P}* *{Q}* *{R}*

Prima trasformazione omogenea (ruota e trasla)
{R} differisce da *{i-1}* solo per la rotazione α_{i-1}
• *{Q}* differisce da *{R}* solo per la traslazione a_{i-1}

Seconda trasformazione omogenea (ruota e trasla)
• *{P}* differisce da *{Q}* solo per la rotazione θ_i
• *{i}* differisce da *{P}* solo per la traslazione d_i

Due Matrici Omogenee

Prima trasformazione omogenea

$$R_Q^{i-1} = T_R^{i-1}(\alpha_{i-1}) T_Q^R(a_{i-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seconda trasformazione omogenea

$$R_i^Q = T_P^Q(\theta_i) T_i^P(d_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La Trasformazione R Finale

Avendo sempre lavorato in terna corrente, la trasformazione finale risultante, si ottiene moltiplicando da sx a dx le singole componenti:

$$R_i^{i-1}(q_i) = R_Q^{i-1} R_i^Q$$

Dove q_i è la variabile di giunto e vale:

$q_i = \theta_i$ se il giunto è rotoidale

$q_i = d_i$ se il giunto è prismatico

La Trasformazione R Finale

In formule, la matrice di trasformazione finale diventa:

$$R_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio (continua)

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

$$R_1^0(q_1) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3^2(q_3) = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & L_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio (fine)

La matrice finale esprime la trasformazione dalla terna $x_0y_0z_0$ alla terna $x_3y_3z_3$

$$R_3^0 = R_1^0(q_1)R_2^1(q_2)R_3^2(q_3)$$

Le prime tre colonne rappresentano i versori della terna $x_3y_3z_3$, mentre la quarta è la posizione dell'origine o_3 rispetto alla terna base