

# LEZIONI DI STATISTICA MEDICA

*Prof. SIMONE ACCORDINI*

## **Lezione n.9**

- *Teoria della probabilità*
- *Distribuzione normale*



Sezione di Epidemiologia & Statistica Medica  
Università degli Studi di Verona

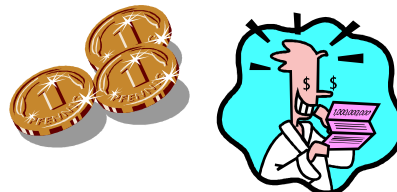
## ELEMENTI DI TEORIA DELLA PROBABILITA'

La TEORIA DELLA PROBABILITA' ci permette  
di studiare e descrivere gli **eventi aleatori**.

**DEFINIZIONE:** un evento è **aleatorio** quando di esso  
non si può predire con certezza il risultato.

### Esempi:

- *numero estratto al lotto*
- *faccia di una moneta*
- *presenza di un'infezione virale*



## SPAZI CAMPIONARI ED EVENTI

Un **esperimento** è un qualsiasi processo di osservazione o misurazione.

**Esempi:**

- estrazione di un numero al lotto
- lancio di una moneta
- valutazione della presenza di un'infezione virale



Ad ogni esperimento è associato uno **spazio campionario S** costituito dall'insieme dei possibili risultati.

I singoli risultati dell'esperimento sono detti **elementi di S** o **eventi elementari**.



E' possibile definire un qualsiasi evento A come combinazione di più eventi elementari → **EVENTO COMPOSTO**

**SPAZIO  
CAMPIONARIO (S)**

**EVENTO (A)**

{TT, TC, CT, CC}

'almeno una testa nel  
lancio di due monete'

= {TT, TC, CT}

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

'numero dispari nel  
lancio di un dado'

= {1, 3, 5}



Un evento A é un **SOTTOINSIEME** dello spazio campionario S:

$$A \subset S$$

Un evento è **CERTO**  
se comprende tutti gli elementi di S



$$A = S$$

Un evento è **IMPOSSIBILE**  
se non comprende alcun elemento di S



$$A = \emptyset$$



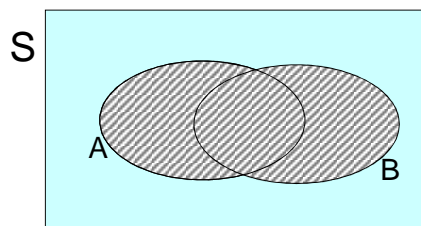
## OPERAZIONI LOGICHE SUGLI EVENTI

Dato uno spazio campionario S e degli eventi  $\{A, B, C, \dots\}$   
in esso inclusi, è possibile definire nuovi eventi mediante  
**OPERAZIONI LOGICHE.**



## UNIONE DI EVENTI (somma logica): $A \cup B$

Siano A e B due eventi associati ad un esperimento:  
l'evento C è definito **unione di A e B** se comprende  
tutti gli elementi che appartengono ad A oppure a B.

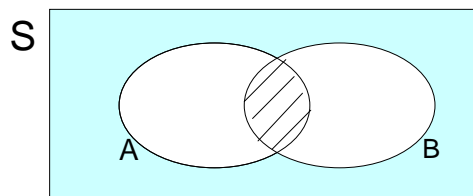


$$C = A \cup B$$



## INTERSEZIONE DI EVENTI (prodotto logico): $A \cap B$

Siano A e B due eventi associati ad un esperimento:  
l'evento C è definito **intersezione di A e B** se comprende  
tutti gli elementi che appartengono ad A e a B.



$$C = A \cap B$$



**Esempio:** nel lancio di un dado sia

A = 'numero pari'

B = 'numero  $\geq 4$ '



Si determini l'insieme unione e l'insieme intersezione.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

UNIONE



$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

INTERSEZIONE



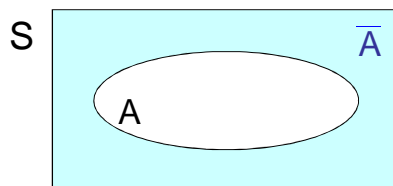
$$A \cap B = \{4, 6\}$$



## NEGAZIONE DI UN EVENTO: $\bar{A}$

Dato un evento A, la sua negazione identifica un nuovo evento  $\bar{A}$  costituito da tutti gli elementi di S non appartenenti ad A.

$\bar{A}$  è detto **complemento di A in S**.



Segue che:

$$A \cup \bar{A} = S$$

Se due eventi A e B non hanno elementi in comune, essi sono detti **EVENTI DISGIUNTI** o **MUTUAMENTE ESCLUSIVI** perché l'occorrenza dell'uno esclude l'altro.

Se A e B sono mutuamente esclusivi  $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$



## PROBABILITÀ

Il concetto di probabilità ci permette di graduare l'ambito delle possibilità o di precisare il grado di fiducia che abbiamo nel verificarsi di un evento.



La **TEORIA DELLA PROBABILITA'** ci permette di **formulare delle valutazioni numeriche di probabilità** e di ricondurle alle regole del calcolo matematico.

L'**interpretazione** di tali valori numerici dipende dal significato che viene attribuito al concetto di probabilità.



## CONCEZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITÀ

La probabilità di un evento A è il rapporto tra il **numero di casi favorevoli** al verificarsi di A (n) e il **numero di casi possibili** (N)

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Esempi:

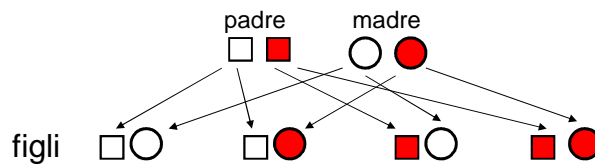
- probabilità di estrarre un asso da un mazzo di 52 carte =  $4/52 = 0.08$
- probabilità di ottenere testa nel lancio di una moneta =  $1/2 = 0.5$



- Tale definizione vale se i possibili risultati sono **equi-probabili** (gioco d'azzardo)
- Scarsamente applicabile in molte situazioni reali

#### Esempio di applicazione in medicina - Malattie genetiche

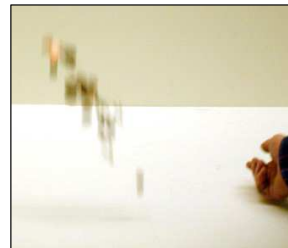
Se entrambi i genitori sono portatori sani del gene della talassemia o della fibrosi cistica, la probabilità di avere un figlio malato è 0.25.



## CONCEZIONE FREQUENTISTA DELLA PROBABILITÀ

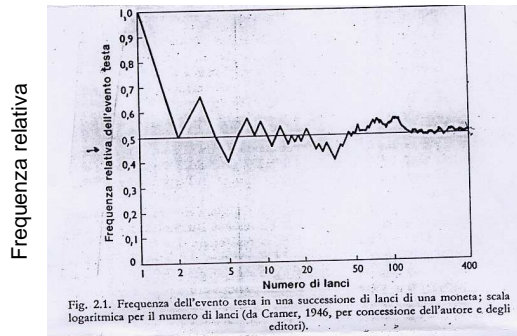
La probabilità di un evento A è la **frequenza relativa di successo** (occorrenza di A) in una serie di prove tendenti all'infinito, ripetute sotto identiche condizioni:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$$



Nel caso della concezione frequentista la probabilità viene assegnata sulla base dei risultati di un esperimento ripetuto molte volte (es. 1) nelle stesse condizioni o sulla base di situazioni che possono essere ricondotte a tale contesto concettuale (ad esempio: utilizzo di statistiche correnti, es. 2).

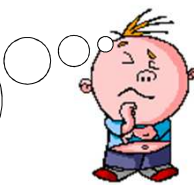
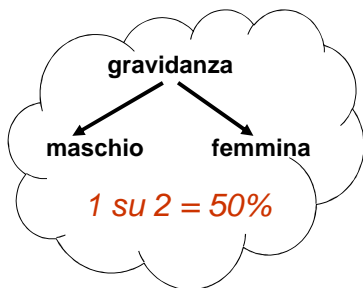
**Esempio 1:**  
Frequenza dell'evento testa in una successione di lanci di una moneta.



**Esempio 2:**  
Prob. che un bambino italiano nasca morto nel 2000 =  $\frac{\text{numero nati morti nel 2000}}{\text{numero nati nel 2000}}$



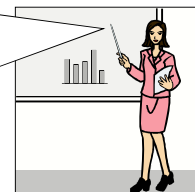
**ESEMPIO: QUAL È LA PROBABILITÀ CHE UN NEONATO SIA FEMMINA?**



(definizione **CLASSICA** di probabilità)

Però nel mondo, in assenza di interventi dell'uomo (aborti o infanticidi selettivi, omessa denuncia) nascono 1057 maschi ogni 1000 femmine.

$$1000 / (1000+1057) = 48,6\%$$



(definizione **FREQUENTISTA** di probabilità)





## TEORIA ASSIOMATICA DELLA PROBABILITA'

Qualsiasi sia la definizione di probabilità, per probabilità (P) si intende una funzione a valori reali definita sullo spazio campionario S che soddisfa i seguenti assiomi:

1) per qualsiasi evento  $A \subset S$ , si ha che:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

in particolare:  $P(A) = 1$  se A è l'evento **certo**

$P(A) = 0$  se A è l'evento **impossibile**

2)  $P(S) = 1$



3) se  $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots\}$  sono una sequenza finita o infinita di eventi mutuamente esclusivi (o disgiunti) di S, allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_i) + \dots$$

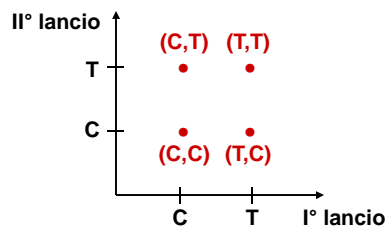
Il modo più elementare per assegnare una funzione di probabilità allo spazio campionario S è quello di assegnare una probabilità ad ogni elemento di S

$\Rightarrow$  la probabilità corrispondente ad un qualsiasi **evento composto A** sarà definita come somma delle probabilità degli eventi elementari contenuti in A (*assioma 3*).

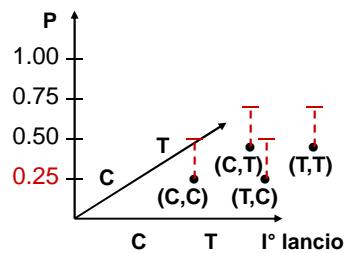


**Esempio:** Si consideri lo spazio campionario S associato al lancio di una moneta per due volte consecutive. In base alla definizione classica di probabilità, possiamo attribuire ad ogni punto dello spazio campionario S una probabilità  $P = 1/4 = 0.25$ .

### SPAZIO CAMPIONARIO



### FUNZIONE DI PROBABILITA'



Probabilità di ottenere almeno una testa

$$= P\{(T,C) \cup (C,T) \cup (T,T)\}$$

$$= P(T,C) + P(C,T) + P(T,T) = 0.25 + 0.25 + 0.25 = \mathbf{0.75}$$



### MAZZO DI 52 CARTE

#### ESERCIZIO:

1. calcolare la probabilità di estrarre l'asso di cuori

$$\mathbf{1 / 52 = 0.02}$$

2. calcolare la probabilità di estrarre una carta rossa

$$\mathbf{26 / 52 = 0.5}$$

3. calcolare la probabilità di estrarre una figura

$$\mathbf{12 / 52 = 0.23}$$

4. calcolare la probabilità di estrarre un re

$$\mathbf{4 / 52 = 0.08}$$



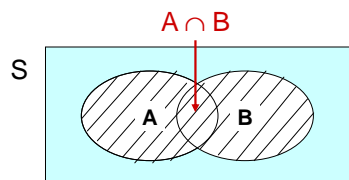
## REGOLE DEL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ

Il calcolo della probabilità è estremamente utile per stabilire sia la probabilità associata ad un evento, sia la probabilità associata ad un insieme di eventi.

### REGOLA DELL'ADDIZIONE

Se A e B sono due eventi in S tali che  $A \cap B \neq \emptyset$  (**eventi non disgiunti**):

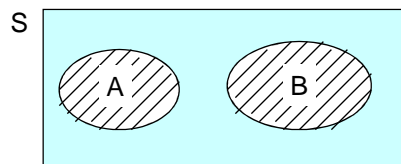
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



### REGOLA DELL'ADDIZIONE

Se A e B sono due eventi in S tali che  $A \cap B = \emptyset$  (**eventi disgiunti**):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



**Esercizio:** calcolare la probabilità di estrarre una carta rossa o una figura da un mazzo di 52 carte (**eventi non disgiunti**)

$$P(\text{carta rossa}) = 26 / 52 = 0.5$$

$$P(\text{figura}) = 12 / 52 = 0.23$$

$$P(\text{carta rossa} \cap \text{figura}) = 6 / 52 = 0.11$$

$$\begin{aligned} P(\text{carta rossa} \cup \text{figura}) \\ = 0.5 + 0.23 - 0.11 = 0.62 \end{aligned}$$

**Esercizio:** calcolare la probabilità di estrarre una figura o una carta compresa tra 3 e 6 da un mazzo di 52 carte (**eventi disgiunti**)

$$P(\text{figura}) = 12 / 52 = 0.23$$

$$P(\text{carta } 3\div 6) = 16 / 52 = 0.31$$

$$P(\text{figura} \cap \text{carta } 3\div 6) = 0 !!!$$

$$\begin{aligned} P(\text{figura} \cup \text{carta } 3\div 6) \\ = 0.23 + 0.31 = 0.54 \end{aligned}$$



Se  $\bar{A}$  è il complemento di A in S:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

*Esercizio:* se la probabilità di morire nel 1° anno dalla diagnosi per un paziente affetto da tumore al polmone è pari a 0.30, qual è la probabilità di sopravvivere al 1° anno?

$$P(\text{sopravvivere}) = 1 - 0.30 = 0.70$$



## PROBABILITÀ CONDIZIONALE E REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE

Talvolta è molto utile conoscere la probabilità di un evento A in S quando si è verificato un altro evento B in S

→ **PROBABILITÀ CONDIZIONALE**

Esempio:

*probabilità di uscita del 7 di quadri dato che è uscita una carta di quadri*

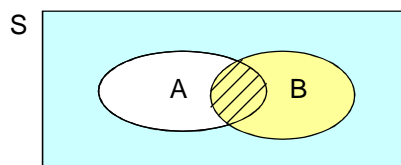
*probabilità di avere un tumore al polmone dato che si fuma*

*probabilità di avere il colera data la presenza di una gastroenterite acuta*



Se A e B sono due eventi dello spazio campionario S, si definisce **probabilità condizionale di A dato B**:

$$P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$$



N.B.: lo spazio campionario dell'evento B diviene il nuovo spazio campionario.



Dalla definizione di probabilità condizionale segue la **REGOLA DELLA MOLTIPLICAZIONE**:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Se il verificarsi di B non condiziona la probabilità del verificarsi di A, segue che:

$$P(A | B) = P(A)$$

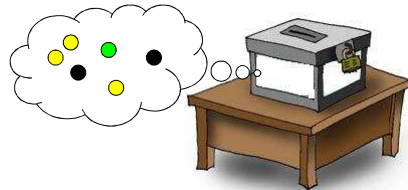
e i due **eventi** sono detti **indipendenti**, ovvero:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



**Esercizio:**

Qual è la probabilità di estrarre senza reimbussolamento due palline gialle da un'urna che contiene tre palline gialle, due nere e una verde?



$$A = \text{estraz. I}^{\text{a}} \text{ pallina gialla} \quad \rightarrow \quad P(A) = 3/6$$

$$B = \text{estraz. II}^{\text{a}} \text{ pallina gialla} \quad \rightarrow \quad P(B | A) = 2/5$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = (3/6)(2/5) = \mathbf{1/5}$$

Se l'estrazione fosse con reimbussolamento:

$$P(B | A) = P(B) = P(A) = 3/6$$

$$P(A \cap B) = (3/6)(3/6) = \mathbf{1/4}$$



## STIME DI PROBABILITA'

### EVENTI DI MAGGIORE INTERESSE IN AMBITO MEDICO:

- malattia / morte (presente, M+; assente, M-)
- esposizione pregressa (presente, E+; assente, E-)

### PROBABILITA' DI MAGGIORE INTERESSE IN AMBITO MEDICO (PROBABILITA' CONDIZIONALI):

- $P(M+ | E+)$
- $P(M+ | E-)$



**esempio:** la probabilità di morte per carcinoma polmonare tra gli individui di sesso maschile di età compresa tra i 55 e i 75 anni è:

$$P(M+) = 0.02$$

informazione quantitativa di  
natura descrittiva

**esempio:** la probabilità di morte per carcinoma polmonare tra gli individui di sesso maschile di età compresa tra i 55 e i 75 anni **fumatori / non fumatori** è:

$$P(M+|E+) = 0.08$$

$$P(M+|E-) = 0.01$$

informazione quantitativa  
sull'associazione tra  
esposizione e malattia



Le probabilità condizionali e il rischio relativo richiedono la stima delle probabilità associate agli elementi dello SPAZIO CAMPIONARIO:

$$S = \{M+E+, M+E-, M-E+, M-E-\}$$

		MALATTIA	
		+	-
ESPOSIZIONE	+	$M+ \cap E+$	$M- \cap E+$
	-	$M+ \cap E-$	$M- \cap E-$



		MALATTIA	
		+	-
ESPOSIZIONE	+	$M^+ \cap E^+$	$M^- \cap E^+$
	-	$M^+ \cap E^-$	$M^- \cap E^-$

In assenza di informazioni a priori, le probabilità associate agli elementi dello spazio campionario possono essere stimate tramite le **frequenze con cui gli eventi elementari si sono verificati nel campione:**

$$P(.) = \frac{n(.)}{n}$$





**Esempio:** valutiamo la relazione tra allattamento al seno (E) e insorgenza di infezioni del primo tratto respiratorio nei primi 4 mesi dalla nascita (M)



Indagine condotta sui nati tra il 1982 e il 1983 in una clinica ostetrica dell'Arizona

		Infezione respiratoria		
		+	-	
Allattamento al seno	+	34	72	106
	-	207	238	445
		241	310	551



E		M			FREQUENZE ASSOLUTE
		+	-		
+	34	72	106		
-	207	238	445		
		241	310	551	

E		M			STIME DI PROBABILITA'
		+	-		
+	0.06	0.13	0.19	$P(.) = \frac{n(.)}{n}$	
-	0.38	0.43	0.81		
		0.44	0.56	1.00	



Per il calcolo delle probabilità rilevanti si può indifferentemente utilizzare la tabella delle frequenze assolute o quella delle stime di probabilità

**esempio: stimate la  $P(M+)$  nei primi 4 mesi di vita**

		M		
		+	-	
E	+	34	72	106
	-	207	238	445
		241	310	551

		M		
		+	-	
E	+	0.06	0.13	0.19
	-	0.38	0.43	0.81
		0.44	0.56	1.00

$$P(M+) = \frac{241}{551} = 0.44$$

$$P(M+) = P(M+ \cap E+) + P(M+ \cap E-) = 0.06 + 0.38 = 0.44$$



**esempio: stimate la  $P(M+ \cup E+)$  nei primi 4 mesi di vita**

		M		
		+	-	
E	+	34	72	106
	-	207	238	445
		241	310	551

		M		
		+	-	
E	+	0.06	0.13	0.19
	-	0.38	0.43	0.81
		0.44	0.56	1.00

$$P(M+ \cup E+) = \frac{241 + 106 - 34}{551} = 0.57$$

$$P(M+ \cup E+) = P(M+) + P(E+) - P(M+ \cap E+) = 0.44 + 0.19 - 0.06 = 0.57$$





**ESERCIZIO:**  
stimate  $P(M+ | E+)$  e  $P(M+ | E-)$

		M		
		+	-	
E	+	34	72	106
	-	207	238	445
		241	310	551

		M		
		+	-	
E	+	0.06	0.13	0.19
	-	0.38	0.43	0.81
		0.44	0.56	1.00



## SOLUZIONE

- $P(M+ | E+) = P(M+ \cap E+) / P(E+) = (34/551) / (106/551) = 34 / 106 = 0.32$
- $P(M+ | E-) = 207 / 445 = 0.47$



**ESERCIZIO:**

*Nella tabella seguente è riportata la distribuzione di frequenza congiunta del sesso e della capacità vitale forzata (FVC) in cl:*

		SESSO		
		Maschi	Femmine	TOTALE
FVC	[200-300]	0	5	5
	(300-400]	4	27	31
	(400-500]	21	13	34
	(500-600]	20	1	21
	(600-750]	9	0	9
TOTALE		54	46	100



Qual è la probabilità che un soggetto abbia un valore dell'FVC  $> 500$  cl?

Qual è la probabilità che un maschio abbia un valore dell'FVC  $> 500$  cl?

Qual è la probabilità che un soggetto abbia un valore dell'FVC  $> 500$  cl e sia femmina?

Qual è la probabilità che un soggetto sia femmina dato che ha un valore dell'FVC  $\leq 400$  cl?



Qual è la probabilità che un soggetto abbia un valore dell'FVC > 500 cl?

$$P(\text{FVC} > 500) = (21+9) / 100 = 0.30$$

Qual è la probabilità che un maschio abbia un valore dell'FVC > 500 cl?

$$P(\text{FVC} > 500 \mid \text{maschio}) = (20+9) / 54 = 0.54$$

Qual è la probabilità che un soggetto abbia un valore dell'FVC > 500 cl e sia femmina?

$$P(\text{FVC} > 500 \cap \text{femmina}) = (1+0) / 100 = 0.01$$

Qual è la probabilità che un soggetto sia femmina dato che ha un valore dell'FVC  $\leq$  400 cl?

$$P(\text{femmina} \mid \text{FVC} \leq 400) = (5+27) / (5+31) = 0.89$$



## VARIABILE CASUALE:

Si definisce variabile casuale (V.C.) una variabile che assume differenti valori con definite probabilità

### ESEMPLI

- Esito del lancio di due dadi

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

- Numero di aborti su  $n$  gravidanze
- Numero di incidenti stradali in un anno in Veneto
- Presenza di asma in un soggetto adulto
- ...



## VARIABILE CASUALE DISCRETA:

V.C. che assume un numero discreto (finito o numerabile) di valori

Funzione di probabilità  $f(x)$

$$f(x) = \text{Prob}(X = x)$$

dove  $f(x)$  è tale che:

1.  $0 \leq f(x) \leq 1$  per ogni  $x$

2.  $\sum_x f(x) = 1$

- Esempi:
- Numero di volte che compare testa su 100 lanci di una moneta
  - Numero di figli maschi su 4 nascite
  - Numero di decessi in un mese in una popolazione



## VARIABILE QUALITATIVA DICOTOMICA

*I fenomeni dicotomici (X) hanno DISTRIBUZIONE BERNOULLIANA  
(→ **MODELLO TEORICO**)*

**Presenza della caratteristica** ( $X = 1$ ):

$$\text{Prob}(X = 1) = \pi$$

**Assenza della caratteristica** ( $X = 0$ ):

$$\text{Prob}(X = 0) = 1 - \pi$$

**PARAMETRO  
(CARATTERISTICA  
DELLA POPOLAZIONE):**

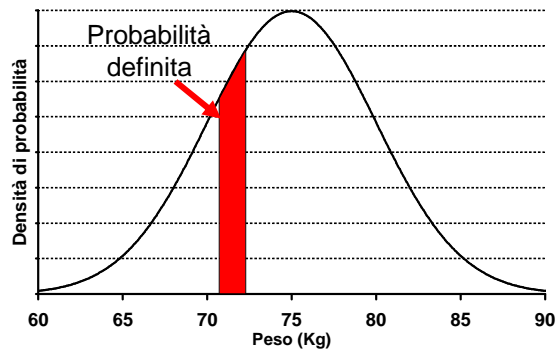
$\pi =$  **probabilità (rischio)  
nella popolazione**

Esempio: Presenza di asma in un soggetto adulto (20-44 anni)  
residente in Italia nel 1998-2000  
→  $p =$  stima di  $\pi = 0.049$  [fonte: studio ISAYA]



## VARIABILE CASUALE CONTINUA:

V.C. che può assumere infiniti valori all'interno di un intervallo [a, b]



E' definita la probabilità di un intorno (per quanto piccolo) di x:

$$0 \leq \text{Prob}(x-\delta \leq X \leq x+\delta) \leq 1$$



## VARIABILE CASUALE CONTINUA:

Funzione di densità di probabilità  $f(x)$

dove  $f(x)$  è tale che:

1.  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x$

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

3.  $\text{Prob}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Esempi:

- Pressione sistolica

- Livello ematico di glucosio

- Altezza

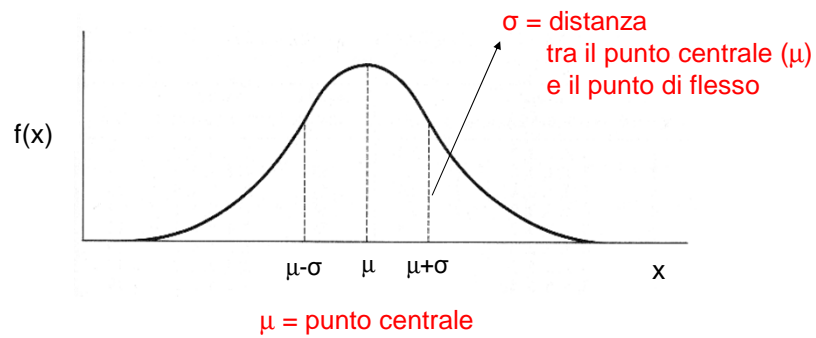
- Peso



## VARIABILE QUANTITATIVA (DISTRIBUZIONE SIMMETRICA)

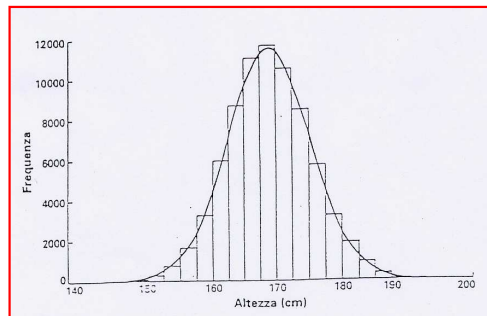
Molte variabili biologiche ( $X$ ) hanno **DISTRIBUZIONE NORMALE** o approssimativamente normale ( $\rightarrow$  **MODELLO TEORICO**)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



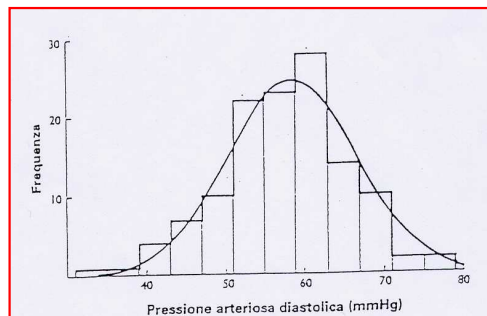
### Esempio:

altezza di giovani maschi adulti

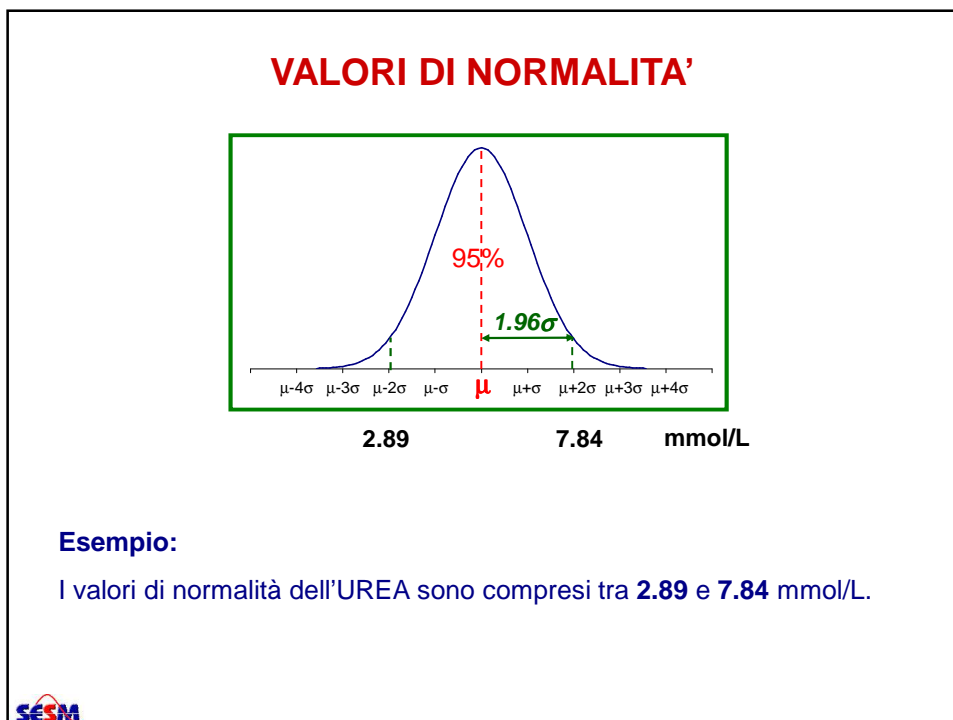
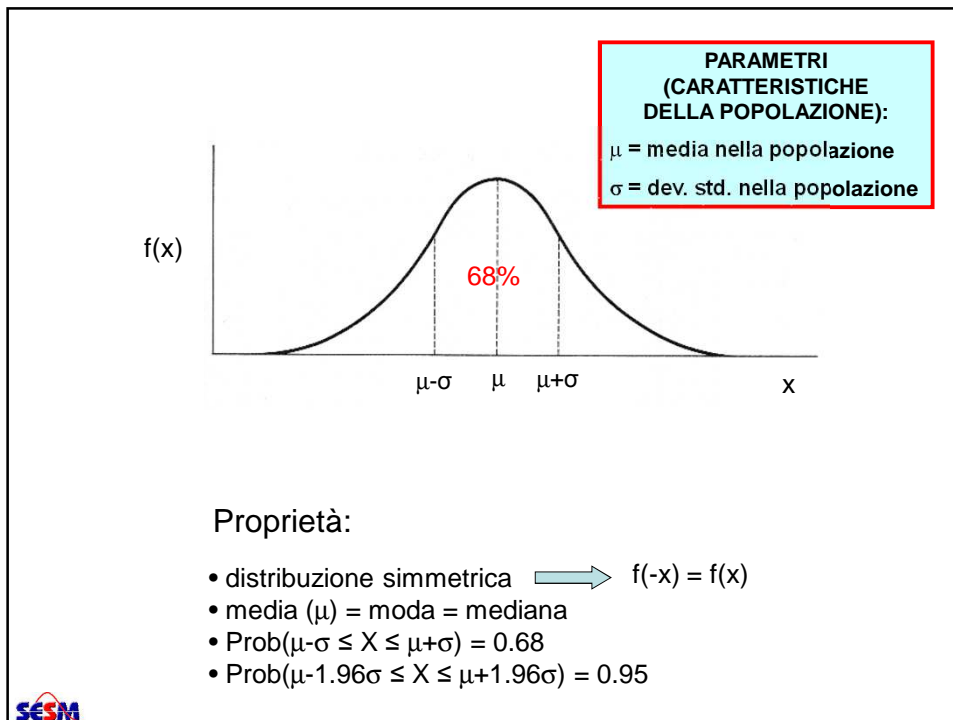


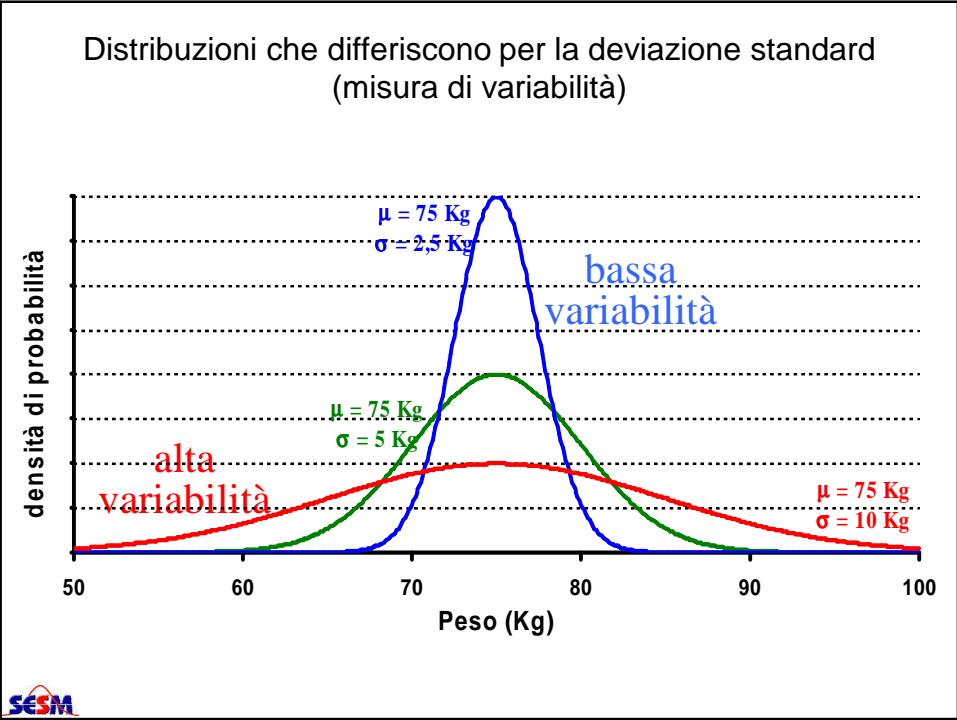
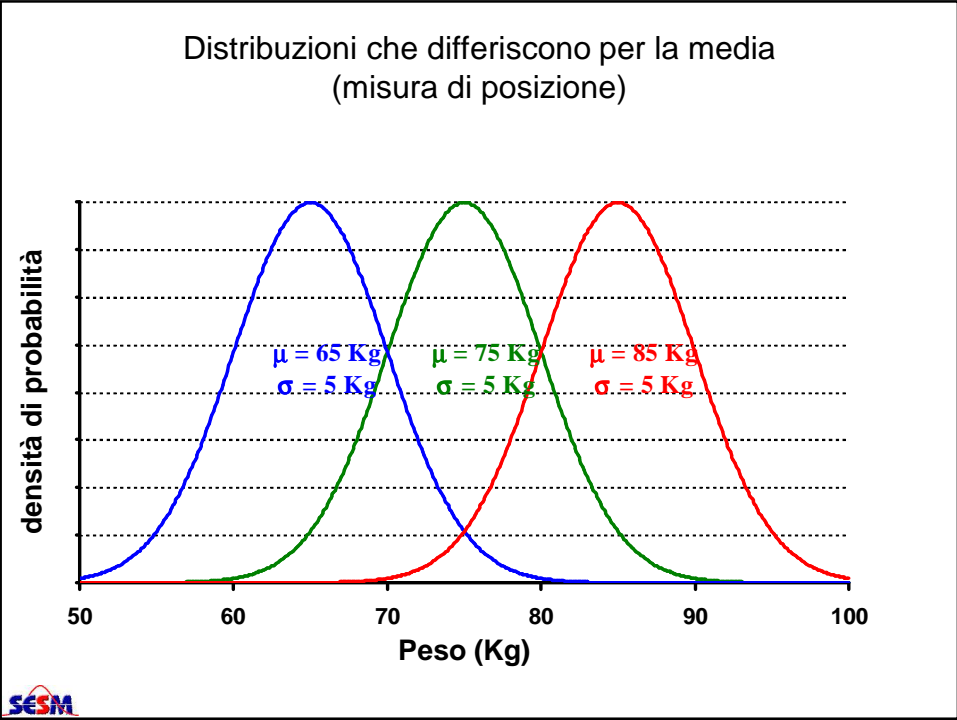
### Esempio:

pressione arteriosa diastolica del sangue di scolari









## DEVIATA NORMALE STANDARDIZZATA

La forma specifica di ogni distribuzione normale dipende dai parametri ( $\mu$ ,  $\sigma$ )

⇒ si ha un'infinità di distribuzioni al variare di  $\mu$  e  $\sigma$

⇒ per calcolare la probabilità associata ad un qualsiasi intervallo di una V.C. normale sarà necessario integrare la specifica funzione di densità

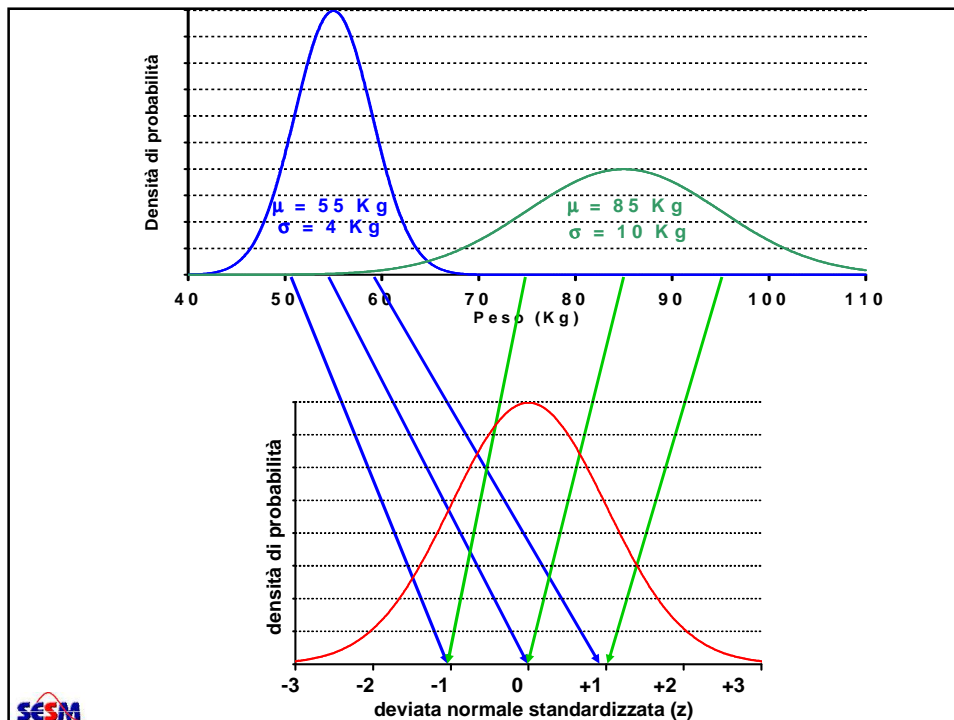
E' possibile ricondurre qualsiasi distribuzione normale ad un'unica distribuzione

→ **DEVIATA NORMALE STANDARDIZZATA**

Sia  $X$  una V.C. continua distribuita normalmente:  $X \sim N(\mu, \sigma)$

La variabile  $Z = (X - \mu) / \sigma$  ha distribuzione normale

con media = 0 e dev. std. = 1:  $Z \sim N(0,1)$



Tavole che danno la probabilità che  $Z$  sia  $\geq$  di un dato valore:

$\text{Prob}(Z \geq z)$

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48404	0.48006	0.47607	0.47209	0.46811	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43250	0.42857	0.42465
0.2	0.42074	0.41683	0.41293	0.40904	0.40516	0.40129	0.39743	0.39358	0.38973	0.38590
0.3	0.38209	0.37829	0.37449	0.37070	0.36692	0.36316	0.35942	0.35569	0.35197	0.34828
0.4	0.34457	0.34083	0.33724	0.33368	0.32999	0.32635	0.32275	0.31917	0.31561	0.31207
0.5	0.30853	0.30506	0.30152	0.29805	0.29458	0.29110	0.28774	0.28439	0.28095	0.27756
0.6	0.27425	0.27081	0.26739	0.26407	0.26086	0.25784	0.25467	0.25142	0.24825	0.24507
0.7	0.24194	0.23852	0.23512	0.23195	0.22895	0.22627	0.22367	0.22095	0.21829	0.21474
0.8	0.21185	0.20870	0.20568	0.20279	0.20004	0.19762	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18400	0.18141	0.17878	0.17618	0.17369	0.17125	0.16885	0.16623	0.16354	0.16107
1.0	0.15855	0.15628	0.15384	0.15150	0.14917	0.14689	0.14457	0.14231	0.14007	0.13785
1.1	0.13566	0.13350	0.13135	0.12928	0.12714	0.12507	0.12304	0.12101	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10934	0.10748	0.10565	0.10385	0.10204	0.10027	0.09852
1.3	0.09681	0.09509	0.09341	0.09179	0.09023	0.08870	0.08719	0.08534	0.08373	0.08224
1.4	0.08075	0.07927	0.07784	0.07639	0.07494	0.07352	0.07214	0.07071	0.06933	0.06812
1.5	0.06687	0.06552	0.06426	0.06300	0.06178	0.06057	0.05939	0.05829	0.05703	0.05591
1.6	0.05479	0.05369	0.05261	0.05151	0.05053	0.04947	0.04845	0.04746	0.04649	0.04554
1.7	0.04455	0.04363	0.04271	0.04181	0.04092	0.04005	0.03920	0.03836	0.03753	0.03672
1.8	0.03593	0.03514	0.03439	0.03365	0.03284	0.03215	0.03143	0.03074	0.03005	0.02937
1.9	0.02871	0.02807	0.02749	0.02680	0.02619	0.02558	0.02498	0.02441	0.02385	0.02329
2.0	0.02275	0.02221	0.02169	0.02117	0.02067	0.02018	0.01969	0.01922	0.01873	0.01830
2.1	0.01784	0.01742	0.01703	0.01658	0.01617	0.01577	0.01536	0.01500	0.01462	0.01426
2.2	0.01393	0.01353	0.01320	0.01287	0.01254	0.01224	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01074	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00938	0.00913	0.00889	0.00865	0.00842
2.4	0.00819	0.00797	0.00776	0.00754	0.00734	0.00714	0.00694	0.00675	0.00656	0.00637
2.5	0.00621	0.00603	0.00586	0.00570	0.00554	0.00538	0.00524	0.00508	0.00494	0.00479
2.6	0.00461	0.00452	0.00437	0.00429	0.00414	0.00402	0.00390	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00290	0.00280	0.00271	0.00265
2.8	0.00255	0.00247	0.00240	0.00232	0.00225	0.00218	0.00211	0.00205	0.00198	0.00192
2.9	0.00186	0.00180	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00153	0.00148	0.00144	0.00139
3.0	0.00135	0.00130	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00110	0.00107	0.00103	0.00101
3.1	0.00098	0.00093	0.00090	0.00087	0.00084	0.00081	0.00078	0.00076	0.00073	0.00071
3.2	0.00067	0.00064	0.00061	0.00059	0.00057	0.00055	0.00053	0.00051	0.00049	0.00047
3.3	0.00043	0.00041	0.00040	0.00039	0.00038	0.00037	0.00036	0.00035	0.00034	0.00033
3.4	0.00033	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
3.5	0.00023	0.00022	0.00021	0.00020	0.00020	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017	0.00016
3.6	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011	0.00011
3.7	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00007	0.00007
3.8	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005
3.9	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003



Grassi G. McGraw-Hill: Milano, 1994.

ESERCIZIO: Qual è la probabilità che  $Z$  sia  $\geq 1.87$ ?

$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48404	0.48006	0.47607	0.47209	0.46811	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43250	0.42857	0.42465
0.2	0.42074	0.41683	0.41293	0.40904	0.40516	0.40129	0.39743	0.39358	0.38973	0.38590
0.3	0.38209	0.37829	0.37449	0.37070	0.36692	0.36316	0.35942	0.35569	0.35197	0.34828
0.4	0.34457	0.34083	0.33724	0.33368	0.32999	0.32635	0.32275	0.31917	0.31561	0.31207
0.5	0.30853	0.30506	0.30152	0.29805	0.29458	0.29110	0.28774	0.28439	0.28095	0.27756
0.6	0.27425	0.27081	0.26739	0.26407	0.26086	0.25784	0.25467	0.25142	0.24825	0.24507
0.7	0.24194	0.23852	0.23512	0.23195	0.22895	0.22627	0.22367	0.22095	0.21829	0.21474
0.8	0.21185	0.20870	0.20568	0.20279	0.20004	0.19762	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18400	0.18141	0.17878	0.17618	0.17369	0.17125	0.16885	0.16623	0.16354	0.16107
1.0	0.15855	0.15628	0.15384	0.15150	0.14917	0.14689	0.14457	0.14231	0.14007	0.13785
1.1	0.13566	0.13350	0.13135	0.12928	0.12714	0.12507	0.12304	0.12101	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10934	0.10748	0.10565	0.10385	0.10204	0.10027	0.09852
1.3	0.09681	0.09509	0.09341	0.09179	0.09023	0.08870	0.08719	0.08534	0.08373	0.08224
1.4	0.08075	0.07927	0.07784	0.07639	0.07494	0.07352	0.07214	0.07071	0.06933	0.06812
1.5	0.06687	0.06552	0.06426	0.06300	0.06178	0.06057	0.05939	0.05829	0.05703	0.05591
1.6	0.05479	0.05369	0.05261	0.05151	0.05053	0.04947	0.04845	0.04746	0.04649	0.04554
1.7	0.04455	0.04363	0.04271	0.04181	0.04092	0.04005	0.03920	0.03836	0.03753	0.03672
1.8	0.03593	0.03514	0.03439	0.03365	0.03284	0.03215	0.03143	0.03074	0.03005	0.02937
1.9	0.02871	0.02807	0.02749	0.02680	0.02619	0.02558	0.02498	0.02441	0.02385	0.02329
2.0	0.02275	0.02221	0.02169	0.02117	0.02067	0.02018	0.01969	0.01922	0.01873	0.01830
2.1	0.01784	0.01742	0.01703	0.01658	0.01617	0.01577	0.01536	0.01500	0.01462	0.01426
2.2	0.01393	0.01353	0.01320	0.01287	0.01254	0.01224	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01074	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00938	0.00913	0.00889	0.00865	0.00842
2.4	0.00819	0.00797	0.00776	0.00754	0.00734	0.00714	0.00694	0.00675	0.00656	0.00637
2.5	0.00621	0.00603	0.00586	0.00570	0.00554	0.00538	0.00524	0.00508	0.00494	0.00479
2.6	0.00461	0.00452	0.00437	0.00429	0.00414	0.00402	0.00390	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00290	0.00280	0.00271	0.00265
2.8	0.00255	0.00247	0.00240	0.00232	0.00225	0.00218	0.00211	0.00205	0.00198	0.00192
2.9	0.00186	0.00180	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00153	0.00148	0.00144	0.00139
3.0	0.00135	0.00130	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00110	0.00107	0.00103	0.00101
3.1	0.00098	0.00093	0.00090	0.00087	0.00084	0.00081	0.00078	0.00076	0.00073	0.00071
3.2	0.00067	0.00064	0.00061	0.00059	0.00057	0.00055	0.00053	0.00051	0.00049	0.00047
3.3	0.00043	0.00041	0.00040	0.00039	0.00038	0.00037	0.00036	0.00035	0.00034	0.00033
3.4	0.00033	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
3.5	0.00023	0.00022	0.00021	0.00020	0.00020	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017	0.00016
3.6	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011	0.00011
3.7	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00007	0.00007
3.8	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005
3.9	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003



Grassi G. McGraw-Hill: Milano, 1994.

ESERCIZIO: Si assuma che tra i soggetti non diabetici il livello ematico di glucosio a digiuno sia distribuito in maniera approssimativamente normale con  $\mu = 105$  mg/dl e  $\sigma = 9$  mg/dl:

1) Qual è la probabilità che un soggetto non diabetico abbia un livello ematico di glucosio a digiuno compreso tra 90 e 125 mg/dl?

$X =$  livello ematico di glucosio                       $\text{Prob}(90 \leq X \leq 125) = ?$

$$Z = (X - \mu) / \sigma \quad \text{per } X = 90 \quad \rightarrow \quad Z = (90 - 105) / 9 = -1.67$$

$$\text{per } X = 125 \quad \rightarrow \quad Z = (125 - 105) / 9 = 2.22$$

$$\text{Prob}(90 \leq X \leq 125) \Leftrightarrow \text{Prob}(-1.67 \leq Z \leq 2.22)$$

$$\text{Prob}(Z \leq -1.67) = \text{Prob}(Z \geq 1.67) = 0.047$$

$$\text{Prob}(Z \leq 2.22) = 1 - \text{Prob}(Z \geq 2.22) = 1 - 0.013 = 0.987$$

$$\text{Pr}(-1.67 \leq Z \leq 2.22) = 0.987 - 0.047 = 0.94$$



2) Qual è il livello ematico di glucosio nei soggetti non diabetici a digiuno tale per cui la probabilità di avere un valore superiore a quel livello è pari a 0.9?

$$\text{Prob}(Z > ?) = 0.9 = 1 - \text{Prob}(Z \leq ?) \quad \rightarrow \quad \text{Prob}(Z \leq -1.28) = 0.1$$

$$-1.28 = (X - 105) / 9 \quad \rightarrow \quad X = 93.5 \text{ mg/dl}$$

3) Qual è l'intervallo (centrato sulla media) di valori ematici di glucosio nei soggetti non diabetici a digiuno per il quale la probabilità di avere un valore al suo interno è pari a 0.95?

$$\text{Pr}(? \leq Z \leq ?) = 0.95 \quad \rightarrow \quad \text{Pr}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

$$\text{Pr}(\mu - 1.96\sigma \leq X \leq \mu + 1.96\sigma) = 0.95$$

$$\text{Pr}(105 - 1.96 \cdot 9 \leq X \leq 105 + 1.96 \cdot 9) = 0.95 \quad \rightarrow \quad X = [87.4 \text{ mg/dl}, 122.6 \text{ mg/dl}]$$

