CORSO DI INFORMATICA

LEZIONE IV

Dott. Simone Accordini

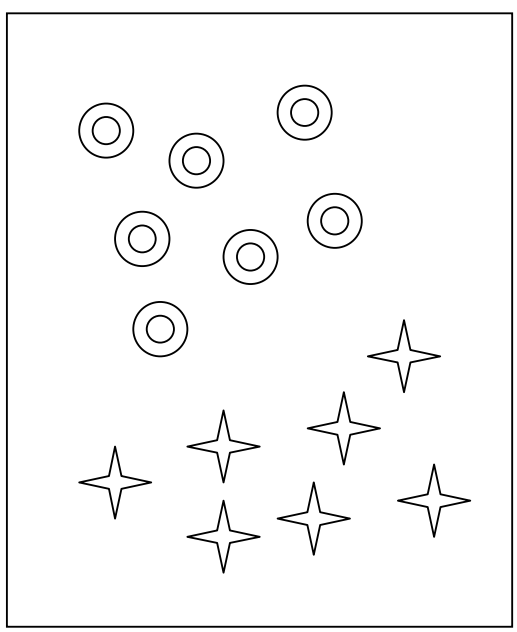
ALGEBRA DEGLI INSIEMI

INSIEME: **concetto primitivo**

$\rightarrow$ ***indicato con una lettera maiuscola dell'alfabeto latino: A, B, …***

esempi:

- oggetti contenuti in una scatola
- tutti i multipli di 3
- insieme di simboli grafici:



ELEMENTI DI UN INSIEME:

'oggetti' che costituiscono l'insieme

→ *indicati con lettere minuscole dell'alfabeto latino: a, b, …; a_1, a_2, …*

APPARTENENZA AD UN INSIEME: $\in$

l'elemento a appartiene all'insieme A → $\boxed{a \in A}$

POTENZA DI UN INSIEME: $\theta[A]$

numero di oggetti che appartengono ad un insieme

- se $\theta[A] = \theta[B] \Rightarrow$ gli insieme A e B sono **EQUIPOTENTI**
- se A e B sono formati dagli stessi elementi

  $\Rightarrow$ gli insieme A e B sono **UGUALI**

Quando si parla degli elementi di un insieme, si fa sempre riferimento ad un AMBITO o UNIVERSO da cui tali elementi provengono.

$\Downarrow$

DIAGRAMMA DI VENN:

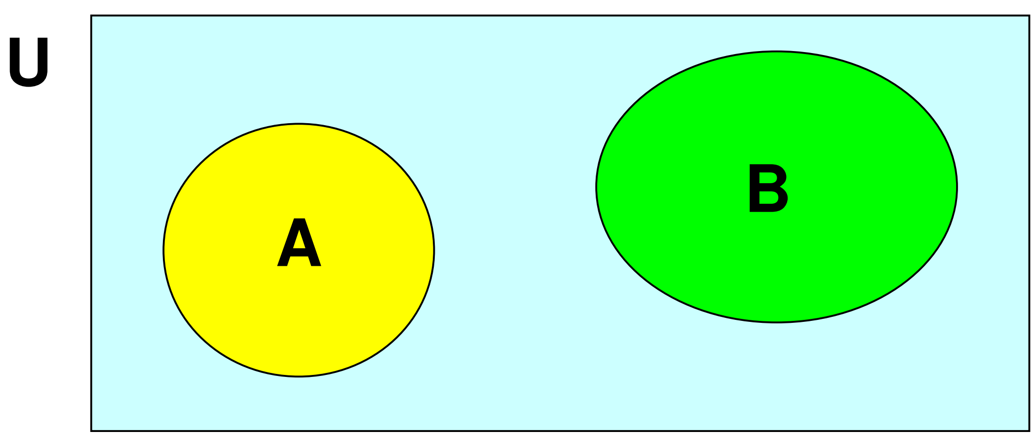
rappresentazione grafica di insiemi

esempio:

U = universo di tutti gli esseri viventi

A = insieme di tutti gli animali superiori

B = insieme di tutti i vegetali



Sia S un insieme di oggetti di un certo universo U.

ESPRESSIONE CARATTERISTICA dell'insieme S:

è una frase $E_S(s)$ che risulta vera in corrispondenza di tutti gli elementi $s \in S$

$$\Downarrow$$

permette di definire l'insieme S:

$$\boxed{S = \{s \mid E_S(s) \text{ è vera}\}}$$

esempio:

A = {a | a è un essere vivente, animale superiore}

B = {b | b è un essere vivente, vegetale}

Sia S un insieme di oggetti di un certo universo U.

Un insieme T si dice SOTTOINSIEME di S se e solo se ogni elemento di T appartiene anche a S.

Un insieme T si dice INCLUSO o CONTENUTO in S se e solo se T è un sottoinsieme di S $\rightarrow$ $\boxed{T \subset S}$

- **un qualsiasi insieme S è un sottoinsieme di un universo U**

- **un insieme S ammette sempre due sottoinsiemi:**
  - **l'insieme vuoto: Ø**
  - **l'insieme stesso**

  $\Rightarrow$ **SOTTOINSIEMI IMPROPRI**

esempio:

lista

S = {1, 2, 3, 5, 7, 8}

T = {1, 2}   T' = {1, 2, 5}   T'' = {2, 5, 7}

- **se $T \subset S \quad \Rightarrow$ ogni elemento di T verifica sia l'espressione caratteristica di T, sia l'espressione caratteristica di S**

- **l'inclusione fra due insiemi T e S induce una relazione fra le due espressioni caratteristiche di T e S**

  $\rightarrow$ **IMPLICAZIONE**

esempio:

$A = \{a \mid$ a è una persona di peso superiore a 75 Kg$\}$

$B = \{b \mid$ b è una persona di peso superiore a 50 Kg $\}$

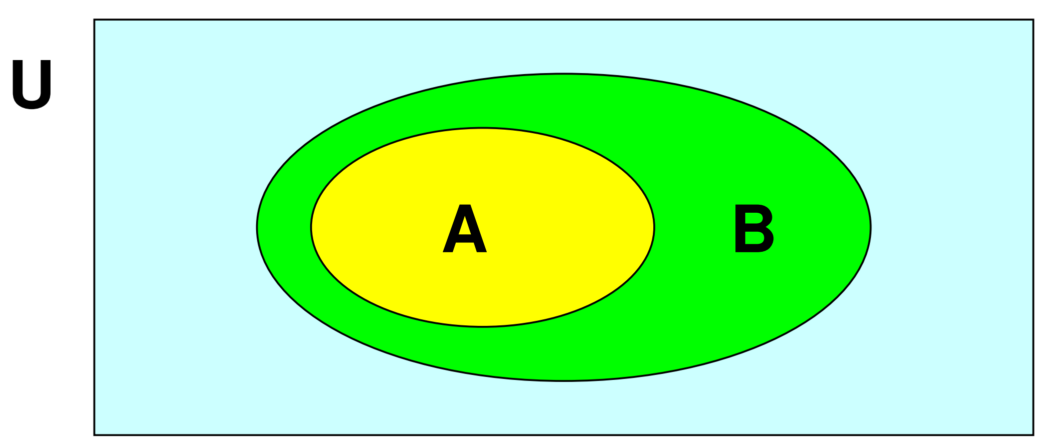
$$\Downarrow$$

$$A \subset B$$

$E_A(a)$ = "a è una persona di peso superiore a 75 Kg"

IMPLICA

$E_B(b)$ = "b è una persona di peso superiore a 50 Kg"



OPERAZIONI TRA INSIEMI

Operazioni che hanno come OPERANDI degli insiemi e che danno come RISULTATO un nuovo insieme.

Siano A e B due insiemi di un certo universo U e $E_A(a)$, $E_B(b)$ le loro espressioni caratteristiche.

1. UNIONE DI INSIEMI: $\boxed{C = A \cup B}$

Si definisce UNIONE di A e di B un nuovo insieme C costituito da tutti gli elementi che verificano almeno una delle due espressioni caratteristiche ($E_A(a)$ e/o $E_B(b)$).

esempio:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\quad$ $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

esempio:

U = universo di tutti gli studenti del I° anno

di una certa Università

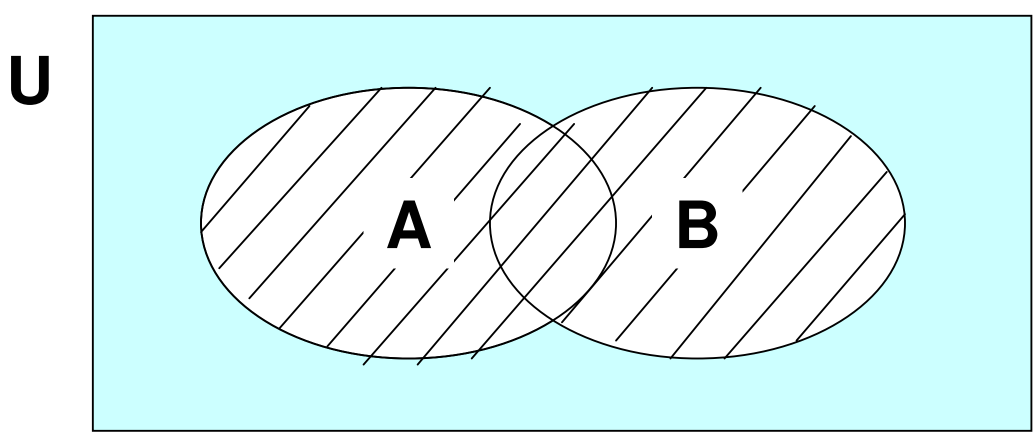
A = {a / a è uno studente del corso di Fisica}

B = {b / b è uno studente del corso di Matematica}

$C = A \cup B$

= {c | c è uno studente del corso di Fisica o

di Matematica}



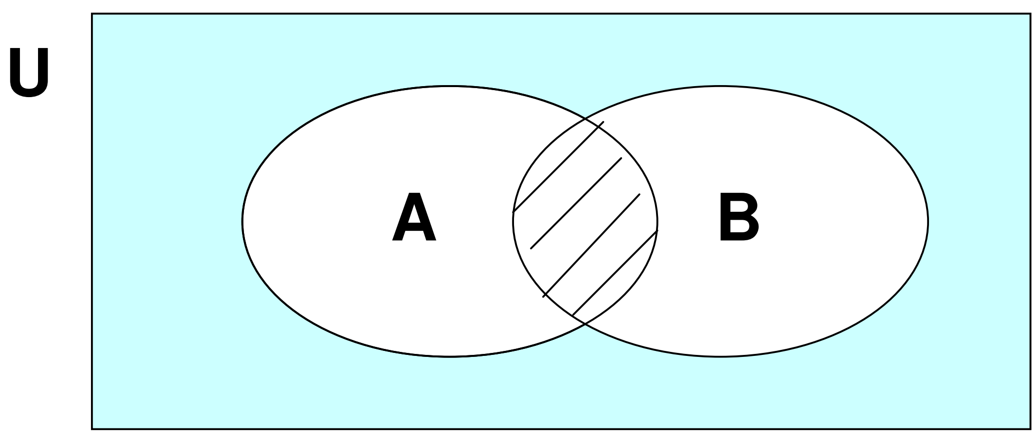
2. INTERSEZIONE DI INSIEMI: $\boxed{C = A \cap B}$

Si definisce INTERSEZIONE di A e di B un nuovo insieme C costituito da tutti gli elementi che verificano <u>entrambe</u> le espressioni caratteristiche ($E_A(a)$ e $E_B(b)$).

esempio:

$C = A \cap B$

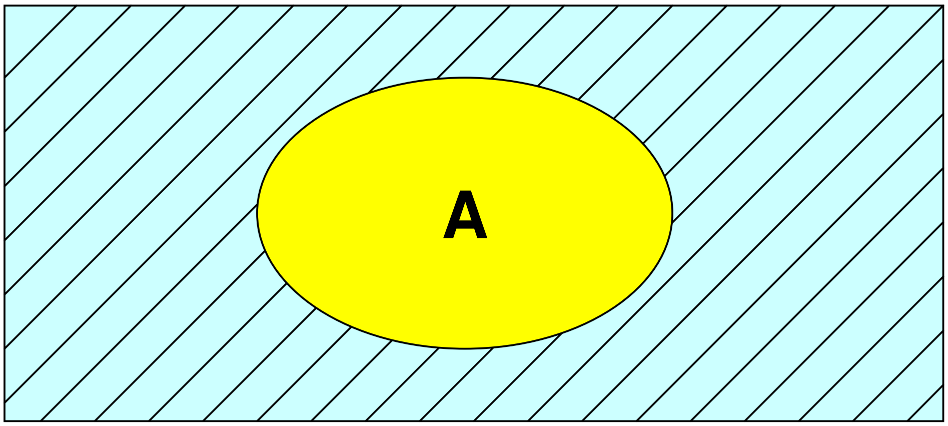
$= \{c \mid$ c è uno studente del corso di Fisica e di Matematica$\}$



3. COMPLEMENTARE DI UN INSIEME: $\boxed{\overline{A}}$

L'**INSIEME COMPLEMENTARE di A** è l'insieme costituito dagli elementi di U che <u>non</u> appartengono ad A.

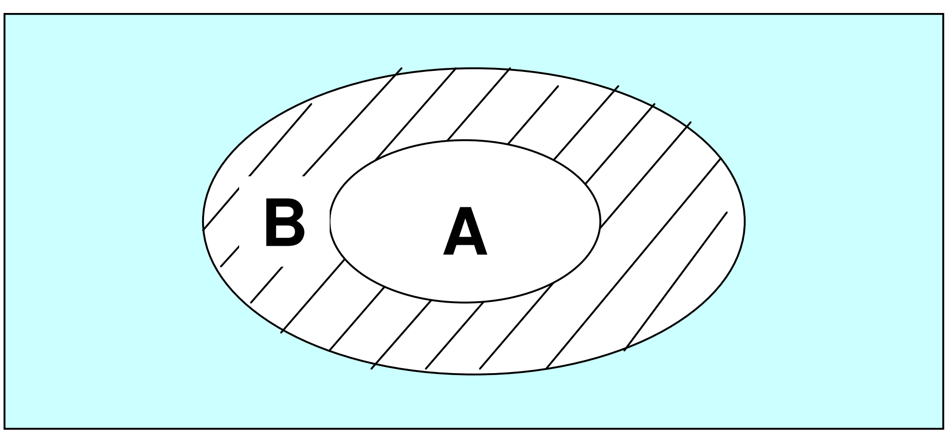
U



4. DIFFERENZA TRA INSIEMI: $\boxed{B - A}$

Se $A \subset B$, la **DIFFERENZA tra i due insiemi** è l'insieme costituito dagli elementi di B che non appartengono ad A.

U



ESPRESSIONE INSIEMISTICA

Sequenza finita di insiemi connessi da simboli operativi in modo lecito.

SIMBOLI OPERATIVI: unione, intersezione e complementazione.

$A \cup B$ $\rightarrow$ ***scrittura lecita***

$A \cup \cap B$ $\rightarrow$ ***scrittura <u>non</u> lecita***

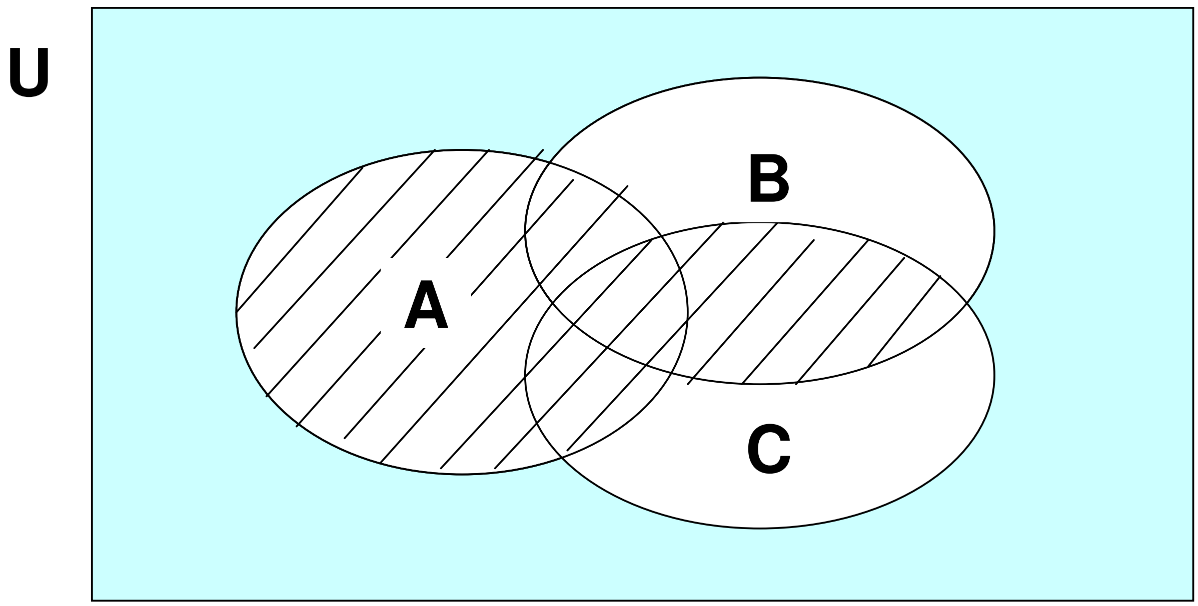
$B \cup C \cap D$ $\rightarrow$ ***scrittura <u>non</u> lecita***

REGOLE:

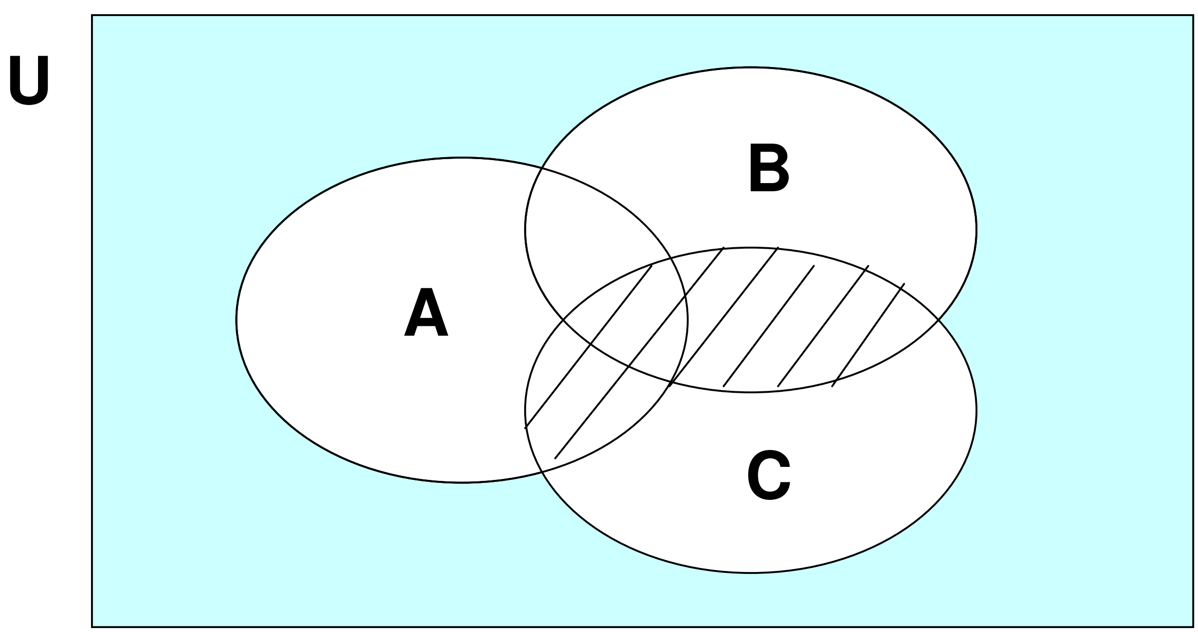
- **un simbolo operativo ($\cup$, $\cap$) è sempre preceduto da un insieme;**
- **un simbolo operativo ($\cup$, $\cap$) è sempre seguito da un insieme;**
- **l'ordine di due operazioni consecutive di tipo diverso è specificato dalle parentesi.**

esempio:

$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap C$



LEGGI BASICHE DELL'ALGEBRA DEGLI INSIEMI

- **leggi commutative:**

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

- **leggi associative:**

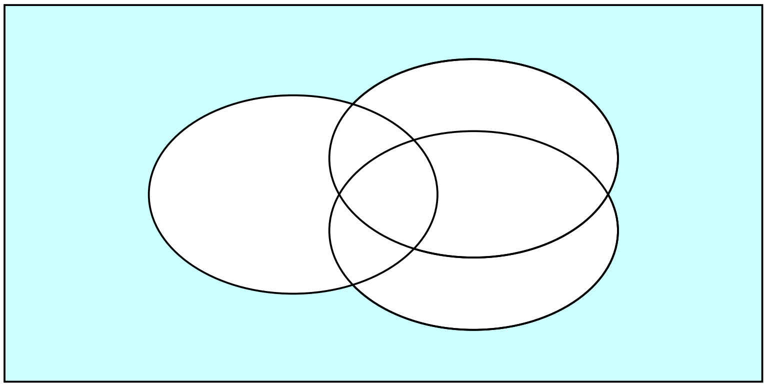
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- **leggi distributive:**

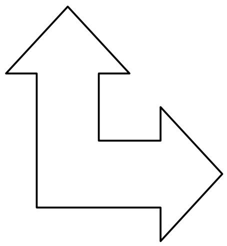
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

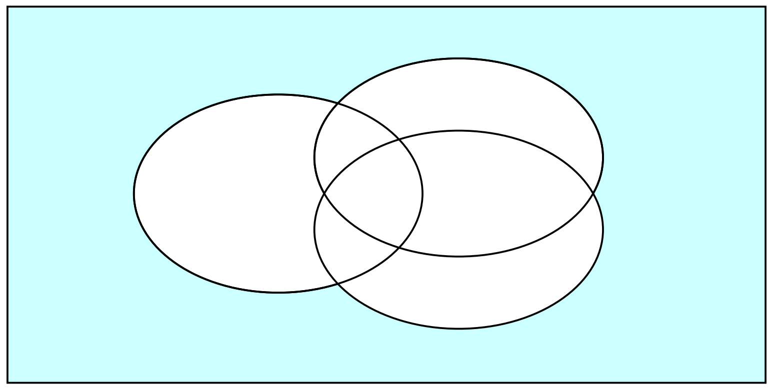
- **altre leggi:**

7. $A \cap U = A$
8. $A \cap \emptyset = \emptyset$
9. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
10. $A \cup \emptyset = A$
11. $A \cup U = U$
12. $A \cup \overline{A} = U$

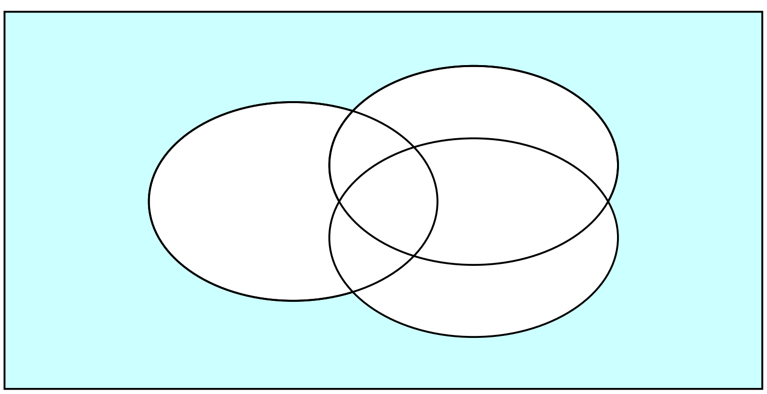


$A \cap (B \cup C)$

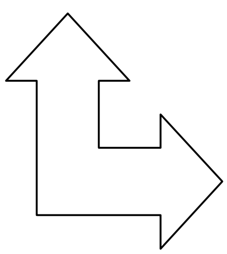


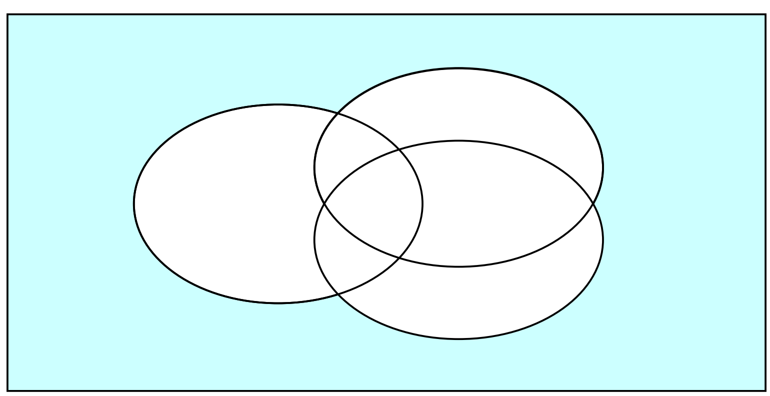


$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



$A \cup (B \cap C)$





$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

ESERCIZIO 1

Sia U l'insieme di tutte le famiglie italiane ed inoltre sia:

A = {famiglie che possiedono un'automobile}

B = {famiglie senza figli}

C = {famiglie di una sola persona}

Scrivete le espressioni caratteristiche dei seguenti insiemi:

$\overline{A}$, $\overline{C}$, $A \cap C$, $A \cup C$, $A \cup (B \cap \overline{C})$, $A \cap (B \cap \overline{C})$, $\overline{A} \cup C$, $\overline{A} \cap (B \cap \overline{C})$

(si consiglia di disegnare il diagramma di Venn dei tre insiemi)

ESERCIZIO 2

Sia U l'universo dei numeri naturali (1, 2, 3, …) ed inoltre sia:

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}　　B = {1, 2, 6 ,8 ,10}

C = {2, 4, 6, 8}　D = {7, 8, 9, 10}　E = {1, 3, 4, 5, 7, 8, 9}

Scrivete la lista dei seguenti insiemi:

$A \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup (E \cap D)$, $\overline{E} \cup \overline{B}$

ESERCIZIO 3

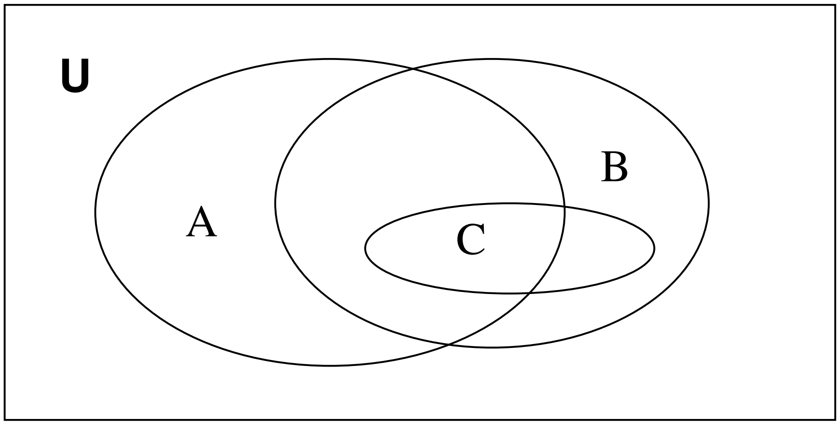
Sia U l'universo di tutte le specialità medicinali che vengono sottoposte ad un controllo tossicologico in un laboratorio specializzato; inoltre, sia A l'insieme di quelle che contengono *almeno due principi attivi*, B l'insieme di quelle contenenti *un antibiotico*, C l'insieme di quelle che hanno rivelato *tossicità elevata*, D l'insieme di quelle che possiedono *elevato effetto terapeutico*.

Descrivete a parole i seguenti insiemi:

$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cap \overline{C}$, $\overline{B} \cap C$, $(A \cap B) \cup (\overline{C} \cap D)$,

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap (C \cup D)$, $B \cap C \cap \overline{D}$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap D$

ESERCIZIO 1:



U = {famiglie italiane}

A = {famiglie che possiedono un’automobile}

B = {famiglie senza figli}

C = {famiglie di una sola persona}

$\overline{A}$ = {famiglie che non possiedono un’automobile}

$\overline{C}$ = {famiglie di almeno due persone}

$A \cap C$ = {famiglie di una sola persona che possiedono un’automobile}

$A \cup C$ = {famiglie che possiedono un’automobile o famiglie di una sola persona}

$A \cup (B \cap \overline{C})$ = {famiglie senza figli di almeno due persone o famiglie che possiedono un’automobile}

$A \cap (B \cap \overline{C})$ = {famiglie senza figli di almeno due persone che possiedono un’automobile}

$\overline{A} \cup C$ = {famiglie che non possiedono un’automobile o famiglie di una sola persona}

$\overline{A} \cap (B \cap \overline{C})$ = {famiglie senza figli di almeno due persone che non possiedono un’automobile}

ESERCIZIO 2:

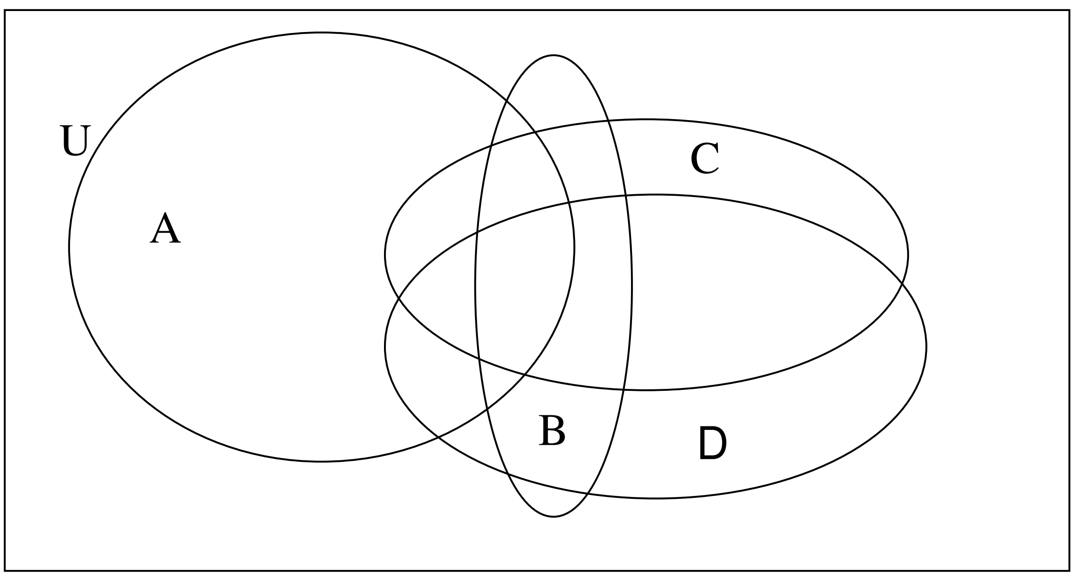
U = N = {1, 2, 3, …}

$A \cup (B \cap C) = A \cup \{2, 6, 8\} = A$

$(A \cap B) \cup (E \cap D) = B \cup \{7, 8, 9\} = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{E} \cup \overline{B} = \{2, 6, 10, \dots\} \cup \{3, 4, 5, 7, 9, 11, \dots\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, \dots\} = N \setminus \{1, 8\}$

ESERCIZIO 3:



U = {specialità medicinali che vengono sottoposte ad un controllo tossicologico in un laboratorio specializzato}

A = {specialità medicinali che contengono almeno due principi attivi}

B = {specialità medicinali che contengono un antibiotico}

C = {specialità medicinali che hanno rivelato tossicità elevata}

D = {specialità medicinale che possiedono elevato effetto terapeutico}

$\overline{A}$ = {s. m. che contengono un solo principio attivo}

$\overline{B}$ = {s. m. che non contengono un antibiotico}

$\overline{C}$ = {s. m. che non hanno rivelato tossicità elevata}

$\overline{D}$ = {s. m. che non possiedono elevato effetto terapeutico}

$A \cup B$ = {s. m. che contengono almeno due principi attivi o che contengono un antibiotico}

$A \cap C$ = {s. m. che contengono almeno due principi attivi e che hanno rivelato tossicità elevata}

$B \cap \overline{C}$ = {s. m. che contengono un antibiotico e che non hanno rivelato tossicità elevata}

$\overline{B} \cap C$ = {s. m. che non contengono un antibiotico e che hanno rivelato tossicità elevata}

$(A \cap B) \cup (\overline{C} \cap D)$ = {s. m. che contengono almeno due principi attivi, di cui uno è un antibiotico, o s. m. che non hanno rivelato tossicità elevata e che hanno elevato effetto terapeutico}

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap (C \cup D)$ = {s. m. che hanno rivelato tossicità elevata o elevato effetto terapeutico e che contengono un solo principio attivo (non antibiotico)}

$B \cap C \cap \overline{D}$ = {s. m. che contengono un antibiotico e che hanno rivelato tossicità elevata e che non possiedono elevato effetto terapeutico}

$\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap D$ = {s. m. che contengono un solo principio attivo (antibiotico) e che non hanno rivelato tossicità elevata e che possiedono elevato effetto terapeutico}

ALGEBRA DELLE PROPOSIZIONI

Nella risoluzione dei problemi, oltre all'aspetto calcolistico, è necessario un ragionamento di tipo logico.

PROPOSIZIONE: espressione grammaticale con un senso logico

⇒ le proposizioni sono la base del ragionamento logico

L'ALGEBRA DELLE PROPOSIZIONI deriva dall'ALGEBRA DEGLI INSIEMI.

DEFINIZIONE DI PROPOSIZIONE

1. **E’ una combinazione di simboli di linguaggio per la quale abbia senso affermare che è VERA o FALSA.**

Una PROPOSIZIONE è una AFFERMAZIONE

esempio di proposizioni:

- Piove
- Il paziente è guarito
- La mucca è un animale marino
- La quercia è un albero
- Sto bene

esempio di NON proposizioni:

- Come stai?
- Finalmente sei qui!
- Evviva!
- Basta!

2. **Le proposizioni possono essere legate tra loro dando luogo a proposizioni più complesse.**

I termini di collegamento vengono chiamati OPERATORI LOGICI:

E (AND)	O (OR)	NON (NOT)
congiunzione	**disgiunzione**	**negazione**

Gli operatori AND e OR si applicano a due proposizioni, mentre NOT si applica a una sola.

esempio: P = “soffia il vento” Q = “fa freddo”

P ***AND*** Q = “soffia il vento e fa freddo”

→ vera solo se sono vere sia P che Q

P ***OR*** Q = “soffia il vento o fa freddo”

→ vera se è vera almeno una tra P e Q

NOT P = “non soffia il vento”

→ falsa se P è vera, ed è vera se P è falsa

Il funzionamento degli operatori logici può essere riassunto tramite le TABELLINE DI VERITÀ.

Sia V una proposizione vera e F una proposizione falsa.

operatore AND

AND	V	F
V	V	F
F	F	F

operatore OR

OR	V	F
V	V	V
F	V	F

operatore NOT

	V	F
NOT	F	V

L'ALGEBRA DELLE PROPOSIZIONI si ottiene dall'ALGEBRA DEGLI INSIEMI mediante le seguenti sostituzioni:

ALGEBRA DEGLI INSIEMI	ALGEBRA DELLE PROPOSIZIONI
insieme	proposizione ($E_A(a)$ = espressione caratteristica)
U = universo	I = identità (proposizione universalmente vera)
Ø = insieme vuoto	F = falsità (proposizione universalmente falsa)
$\cup$ (unione)	OR
$\cap$ (intersezione)	AND
complementare	NOT
$\subset$ (inclusione)	$\Rightarrow$ (implicazione)

esempio:

ALGEBRA DEGLI INSIEMI

1. $\overline{A} \cap \overline{B}$
2. $A \cup \overline{A} = U$
3. $A \cap B \subset A$

$$\downarrow$$

ALGEBRA DELLE PROPOSIZIONI

1. ***NOT*** **P** ***AND NOT*** **Q**
2. **P** ***OR NOT*** **P = I**
3. **P** ***AND*** **Q** $\Rightarrow$ **P**

ESERCIZIO

Siano: **P una proposizione VERA**

Q una proposizione VERA

R una proposizione FALSA

Definite il valore delle seguenti proposizioni:

P *AND* Q

P *OR* R

***NOT* R**

P *OR* (Q *OR* R)

(P *AND* Q) *AND* R

P *OR* (Q *AND* R)

(R *OR* P) *AND* Q

(P *OR* R) *AND* (Q *OR* R)

SOLUZIONE

Siano: P una proposizione VERA

Q una proposizione VERA

R una proposizione FALSA

Definite il valore delle seguenti proposizioni:

P *AND* Q	→	**VERA**
P *OR* R	→	**VERA**
***NOT* R**	→	**VERA**
P *OR* (Q *OR* R)	→	**VERA**
(P *AND* Q) *AND* R	→	**FALSA**
P *OR* (Q *AND* R)	→	**VERA**
(R *OR* P) *AND* Q	→	**VERA**
(P *OR* R) *AND* (Q *OR* R)	→	**VERA**